

# 宇宙航空研究開発機構研究開発資料

## JAXA Research and Development Memorandum

---

### 疲労寿命安全率に関するノート

伊藤 誠一, 杉本 直, 岡田 孝雄

2012年1月

宇宙航空研究開発機構  
Japan Aerospace Exploration Agency

# 疲労寿命安全率に関するノート

## 目 次

概要	1
1. はじめに	1
2. 2母数ワイブル分布に基づく疲労寿命安全率の評価	2
2.1 尺度母数を未知とした疲労寿命安全率	3
2.2 TTFFに基づく疲労寿命安全率	5
2.3 ベイズの方法による評価	6
2.3.1 ベイズの定理	6
2.3.2 ベイズの方法による疲労寿命安全率の評価	7
2.3.3 信頼度の変動	9
3. 疲労寿命を対数正規分布とする疲労寿命安全率	9
3.1 疲労寿命の平均値の推定	10
3.2 標準偏差 $\sigma$ の推定	11
3.3 疲労寿命安全率と破壊確率	12
3.4 ベイズの方法による疲労寿命安全率の評価	13
4. 疲労寿命安全率に対する関連研究	14
4.1 FTOSE による疲労寿命安全率の検討	14
4.2 3母数ワイブル分布の適用	16
5. 広範囲の不確定性に対するベイズ信頼性解析	16
5.1 Fuzzy-Bayes-Weibull 信頼性解析(FBW)	17
5.1.1 FBW 法による評価	19
5.2 階層ベイズ法に基づく信頼性評価(HB)	20
5.2.1 モデルの構成	20
5.2.2 ギブス・サンプリングによる事後分布の計算	21
5.2.3 HB を用いた解析	21
5.3 フリート信頼性に関する補足	22
6. まとめ	23
謝辞	23
参考文献	23
補記 1	25
補記 2	26
補記 3	28
補記 4	29
補記 5	30

# 疲労寿命安全率に関するノート\*

伊藤 誠一<sup>\*1</sup>, 杉本 直<sup>\*1</sup>, 岡田 孝雄<sup>\*2</sup>

## Investigation of scatter factor for aircraft structures\*

Seiichi ITO<sup>\*1</sup>, Sunao SUGIMOTO<sup>\*1</sup> and Takao OKADA<sup>\*2</sup>

### Abstract

Though the evaluation model for fatigue life scatter factor of aircraft structure is not few, and the global value of scatter factor is not necessarily clear according to limited fatigue life information and probability characteristic of fatigue life. In this research note, some typical investigation concerning the scatter factor are brought together, and our recent research based on the Bayesian theory are shown using the calculation statistics. Numerical examples using the free and open-source software "R" were conducted to demonstrate the Bayesian method's effectiveness, enabling rational use of information in a situation of data shortage and large uncertainty.

### 概 要

航空機構造の疲労に対する安全寿命を評価するモデルは種々提案されているが、試験情報や設計思想に依存して疲労寿命安全率(scatter factor: Sf)の値は一義的に定められてはいない。そこで、本ノートでは輸送機構造に関する疲労寿命安全率の評価法についてまとめるとともに、今までに行われた代表的な研究例等を概括する。さらに不確定性の多い状況下での疲労寿命安全率の指標について、ベイズ理論(Bayesian theory)を適用した幾つかの評価モデルを記す。

**Keywords:** 疲労寿命安全率、構造信頼性、ベイズ理論、ファジイ集合、計算統計学

### 1. はじめに

航空機構造に対する信頼性概念の導入はコメット機の事故(1954年)を契機とした疲労強度の研究とともに始まると考えられる。その後、安全性を確保するための耐空性基準の改正がなされ、漠然としていた疲労に対して安全寿命設計(セーフライフ設計)とフェイルセーフ設計の二つの設計法が定められた。安全寿命設計では、耐空性を維持するために運用中に損傷の発生がないことを保証しなければならない。疲労損傷の発生時期を構造寿命とする本設計法は、試験標本数や目標信頼度および信頼水準の設定によって解析で得られる疲労寿命安全率 Sf が大きく異なる。疲労寿命安全率とは、疲労試験や解析から得た平均寿命(特性寿命)を目的の設計寿命で除した係数であり、静強度の安全率よりも変動の大きい、疲労強度に対する安全余裕を示す指標である。

---

\* 平成23年10月31日受付 (Received 31 October 2011)

\*1 研究開発本部 複合材グループ

(Advanced Composite Group, Aerospace Research and Development Directorate)

\*2 航空プログラムグループ 運航・安全技術チーム

(Operation and Safety Technology Team, Aviation Program Group)

米国連邦航空局(Federal Aviation Administration: FAA)の規定、FAR25.571(c)Fatigue (safe-life)<sup>1)</sup>では、安全寿命を試験によって立証する場合には適切な疲労寿命安全率を設定することを定めている。しかし、国際的な規定値や、指示規範となる基本的な考え方などはなく、したがって疲労寿命の保証試験で用いられる疲労寿命安全率は、現状では各国によって種々の値が設定されている。疲労寿命の変動を扱う疲労寿命安全率は荷重や疲労寿命の確率分布の定義などによって一義的には決まらないこと、また疲労破壊に対する破壊確率値の取り方が経済性に依存することなどが、その背景にある。実機開発時に適用される疲労寿命安全率の値は機種や構造部位によって異なるが、多くの場合1~3程度である。耐空性要求として本設計法に従う構造部位は、損傷許容設計(damage tolerance design: DTD)の対象外である主脚等の一部に限られる。しかし疲労破壊に対する耐空性の実証では、FARの最新の規定、FAR25.571(c)(FAR細則 AC.No.25.571-IC)に記されているように、設計寿命の2倍以上の実機疲労試験を行うこと、すなわち  $Sf \geq 2$  の実機体を用いた疲労試験を実施することが要求されている<sup>2),3),4)</sup>。ただし、これは安全寿命設計に対する記述ではなく、損傷許容設計の観点で、経年損傷(widespread fatigue damage: WFD)の発生のないことを保障するための規定であり、経年機体構造に重きを置いている。

以上のように、安全寿命設計では疲労寿命安全率に対するグローバルな推奨値は必ずしも明確ではない。そこで、本ノートでは輸送機構造(主としてアルミ合金)に対する疲労寿命安全率の評価法についてまとめるとともに、これまでに行われた代表的な評価手法や研究例等を概括する。

## 2. 2母数ワイブル分布に基づく疲労寿命安全率の評価

疲労寿命の信頼性評価では、最初に疲労寿命  $N$  の確率分布を仮定する。疲労寿命安全率に対して今までに適用された疲労寿命の確率分布モデルとその母数が調査されている<sup>5)</sup>。その結果を表1に示す。本章では、現在もっとも一般的な評価手法と考えられている、Boeingの提唱している2母数ワイブル分布  $W(N|\alpha, \beta)$  に基づく評価手法を主として記す。

分布を特性付ける未知母数  $(\alpha, \beta)$  を試験結果から推定するが、両母数を未知とすると一般に過度に安全側の結果が得られるため、通常は形状母数  $\alpha$  が既知であると考え、尺度母数  $\beta$  を未知に置く。形状母数  $\alpha$  は部材切り欠き形状や負荷荷重、また環境ストレスなどに大きく影響されることはなく、材料固有の値を持つと考えられている。この妥当性は、I.C.Whittaker等によるアルミ系合金に関する11,000点以上におよぶ疲労試験データ評価解析<sup>6)</sup>において確認されている。

このワイブル分布評価で用いられた情報は、2,000以上のデータ組から構成され、各々の組では尺度母数  $\beta$  は異なるが、形状母数  $\alpha$  は同じ母集団とみなしている。これを満たす統計量が順序統

表1 疲労寿命安全率に関して用いられた確率分布と母数値<sup>5)</sup>

Item	材料*	Weibull			Log-normal		
		$\alpha_{95}$	$\alpha_{short}^{**}$	$\alpha_{long}^{***}$	$\sigma$	$\sigma_{90}$	$\sigma_{95}$
P-51(1956)	Al				0.176		
YS-11(1961)	Al				0.194		
YS-11(1981)	Al	4.0					
Boeing(USAF) (1969,1972)	Al	4.0					0.14
	Ti	3.0					0.18
Lockeed(1977)	Al					0.21	
Australia(1971)	Al		5.9	3.9			
CAA(1981)	Al				0.14		
	Ti				0.19		

\*Al:アルミニウム合金、Ti:チタン合金、\*\*Fighter、\*\*\*Trans-Port

表 2 機体構造の信頼性評価に使用されている信頼度と信頼水準<sup>5)</sup>

	信頼度	破壊確率	信頼水準	備考
MIL-HDBK A	0.99	0.01	0.95	Normal (母数未知)
B	0.90	0.1	0.95	
Boeing	0.95	0.05	0.95	Weibull
ICAO	0.99999	0.00001		
YS-11 原型機	0.9987	0.0013	0.90	Log-normal
YS-11 改訂	0.99999	0.00001	0.95	Log-normal

計 (first two ordered statistics estimator: FTOSE)である。疲労寿命評価ではデータ中の異常値、特に長寿命データの推定値への影響が高いことから、これを排除するために N.R.Mann が導出した順序統計<sup>7,8)</sup>が適用されている。その結果、アルミ合金固有の値として、 $\alpha=4$  近傍の結果が得られている。このように形状母数 $\alpha$ を既知として、実試験の少数標本から未知母数の尺度母数 $\beta$ の最良点推定値を求める。しかしながら点推定値はそれほど高い信頼性を有しているわけではない。試験標本の抜き取りによる偶然性については、真の尺度母数に対して、ある信頼性水準  $1-\gamma$  ( $\gamma$ : 危険率)で真値が存在する信頼性限界を定めて、この区間内に真値が収まる確率を高く取ることで、寿命評価の信頼性を増すことができる。そして評価の最終段階では、設計条件としての目標信頼度  $R_d$  および上述の両母数推定値から運用目標寿命  $N_d$  を定める。参考までに、航空機構造の信頼性評価で用いられている信頼度および信頼水準の代表例を表 2<sup>5)</sup>に示す。なお、MIL-HDBK(米国軍用規格)の許容値 A,B を与える係数  $k$  に対する計算例を補記 1 に説明する。

## 2.1 尺度母数を未知とした疲労寿命安全率

疲労寿命  $N$  に対する 2 母数ワイブル分布の確率密度関数(pdf)を(1)式に示す。

$$f_N(N|\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} (N/\beta)^{\alpha-1} \exp\{-(N/\beta)^\alpha\} \quad (1)$$

上記のように蓄積された資料や経験、そして過去の評価実績などからワイブル分布の形状母数 $\alpha$ の値を既知とし、尺度母数 $\beta$ が未知であると仮定する。この $\beta$ を試験結果から推定して、安全寿命を検討する。試験数  $n$  で、 $\mathbf{N}=\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ なる疲労寿命の結果を得たとする。これを用いると、尺度母数 $\beta$ の最尤推定値 (特性寿命) :  $\underline{\beta}$  (most likelihood estimator : MLE)が(2)式で得られる。

$$\underline{\beta} = \left\{ \sum_{i=1}^n N_i^\alpha / n \right\}^{1/\alpha} \quad (2)$$

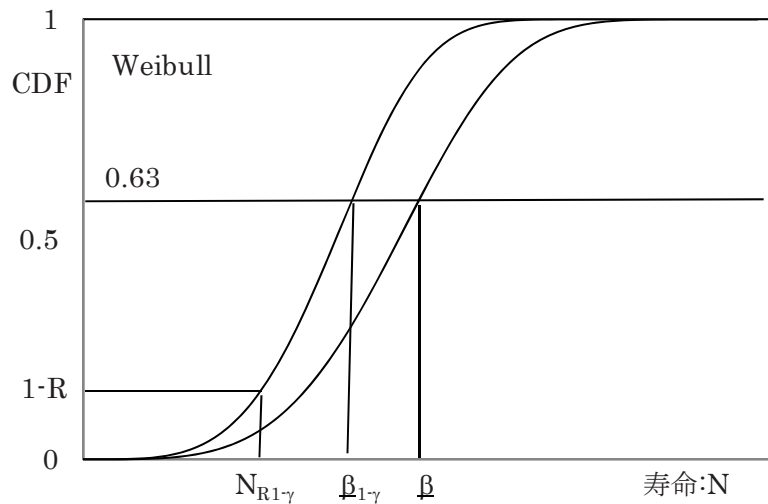
この試験から得られた特性寿命 $\underline{\beta}$ を設計寿命  $N_d$  で割ったものが疲労寿命安全率  $S_f$  (3)式の意味す

$$S_f = \underline{\beta} / N_d \quad (3)$$

るところであるが、 $\underline{\beta}$ は少量標本からの特性値で確率変数である。そこで、この $\underline{\beta}$ の確率密度関数  $f(\underline{\beta})$ を(4)式に示す。

$$f(\underline{\beta}) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\underline{\beta}}\right)^{n-1} \exp\{-n(\underline{\beta}/\beta)^\alpha\} \quad (4)$$

したがって $\beta$ については、 $1-\gamma$ なる確率で存在し得る $\underline{\beta}$ の最小値を用いること、すなわち信頼水準  $1-\gamma$ における下限片側区間推定値 $\beta_{1-\gamma}$ が適用される。なお、変数  $2n(\underline{\beta}/\beta)^\alpha$  が自由度  $2n$  の $\chi^2$ 分布に従うことから、 $\beta_{1-\gamma}$ が(5)式によって得られる。

図1 特性寿命 $\beta$ と安全寿命 $N_{R,1-\gamma}$ 

$$\beta_{1-\gamma} = \underline{\beta} \left\{ \chi_{1-\gamma}^2(2n) / 2n \right\}^{-1/\alpha} \quad (5)$$

以上の2母数ワイブル分布における疲労寿命安全率  $S_f$  の導出について、図1に概説する。目標信頼度  $R_d$  および信頼水準  $1-\gamma$  に応じた安全寿命を  $N_{R,1-\gamma}$  と表記すると、 $N_{R,1-\gamma}$  はワイブル関数から(6)式で表され、疲労寿命安全率  $S_f$  は(7)式に示すように、3つの係数、 $S_c$ : confidence factor、

$$N_{R,1-\gamma} = \beta_{1-\gamma} \left\{ \ln(1/R_d) \right\}^{1/\alpha} \quad (6)$$

$$S_f = S_c \cdot S_R \cdot S_M \quad (7)$$

$S_R$ : reliability factor、 $S_M$ : fleet size factor から構成、表記することができる<sup>7)</sup>。係数各々の評価式を(8)、(9)、そして(10)式に示す。また、 $\chi_a^2(b)$  は自由度  $b$  のカイ2乗分布の  $a \cdot 100\%$  点を示す。

$$S_c = \underline{\beta} / \beta_{1-\gamma} = \left\{ \chi_{1-\gamma}^2(2n) / 2n \right\}^{1/\alpha} \quad (8)$$

$$S_R = \left\{ \ln(1/R_d) \right\}^{-1/\alpha} \quad (9)$$

$$S_M = (M)^{1/\alpha} \quad (10)$$

(5)式を変形した係数  $S_c$  は試験標本数  $n$  を勘案し、また  $S_R$  は所定の信頼度を得るための指標として、そして  $S_M$  は同種機体数 (フリートの大きさ  $M$ ) の影響を各々表している。ここで、信頼水準  $1-\gamma=0.95$  として、(8)式の関係、すなわち  $S_c$  と標本数  $n$  との関連を、形状母数  $\alpha$  を媒介として図2に示す。 $\alpha$  の小さい領域を除いて、 $n$  が  $S_c$  に与える影響はそれほど大きくはなく、標本数  $n$  が少ない場合であっても、 $S_f$  の推定に大きく誤差は入らないことが伺える。なお、一般にフリートの大きさを  $M=1$  として2母数ワイブル分布に対する  $S_f$  を定義する場合は多いので、(7)式に代わり、これを次式に示す。なお、 $S_f$  の関連諸式を補記2にまとめる。

$$S_f = S_c \cdot S_R = \frac{\underline{\beta}}{N_{R,1-\gamma}} = \left\{ \frac{1}{2n} \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2n)}{\ln(1/R_d)} \right\}^{1/\alpha} \quad (11)$$

(4)式の  $f(\underline{\beta})$  から、 $\underline{\beta}$  の期待値と分散が各々(12)、(13)式で求まる。

$$E[\underline{\beta}] = \underline{\beta} \Gamma(n+1/\alpha) / \Gamma(n) n^{1/\alpha} \quad (12)$$

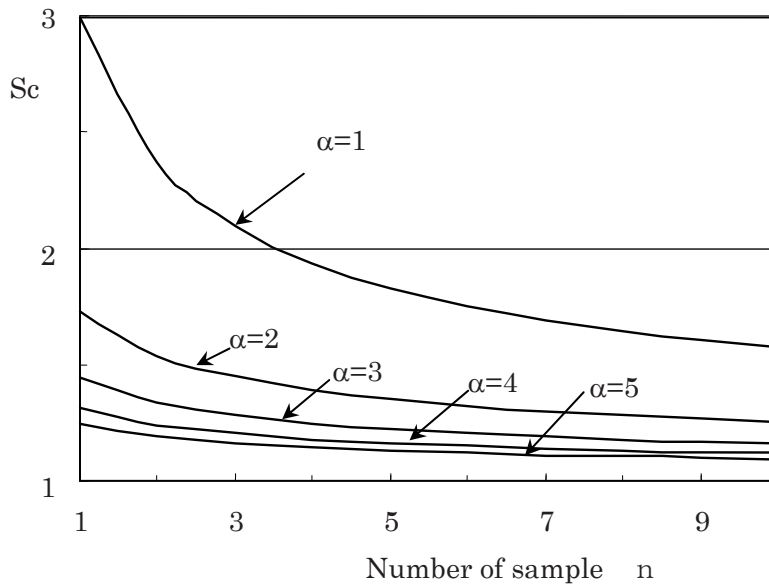


図 2 Sc と標本数

$$V[\underline{\beta}] = \underline{\beta}^2 \Gamma(n + 2/\alpha) / \Gamma(n) n^{2/\alpha} - E[\underline{\beta}]^2 \quad (13)$$

これらを用いて、 $\underline{\beta}$ に関する標本数の影響を示した結果を図3に示す。標本数  $n$  の増加とともに分散は減少して推定精度が向上するが、その効果は減少してゆく。したがって、目的の信頼度要求から適切な標本数を定める必要がある。2 母数ワイブル分布に対する解析値および試験結果としての各々の  $S_f$  ( $S_M=1$  の場合)、すなわち(9)および(11)式の結果を図4に示す。

### 2.2 TTFF に基づく疲労寿命安全率

A.M.Freudenthal は疲労寿命に 2 母数ワイブル分布を仮定して、さらに機体構造のフリート運用における最初の破損寿命分布 (time to first failure: TTFF) と併せて疲労寿命安全率を論じている<sup>9)</sup>。フリート中の最初の疲労破壊寿命を  $N_1$  とすると、(3)式と同様に  $N_1$  に基づく疲労寿命安

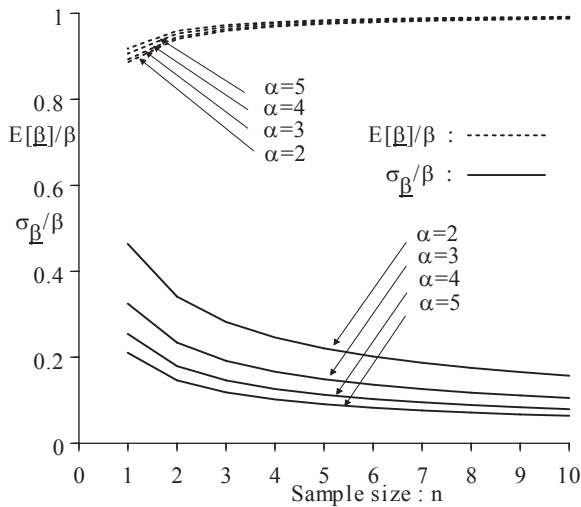


図 3  $\beta$  の最尤推定値の変動

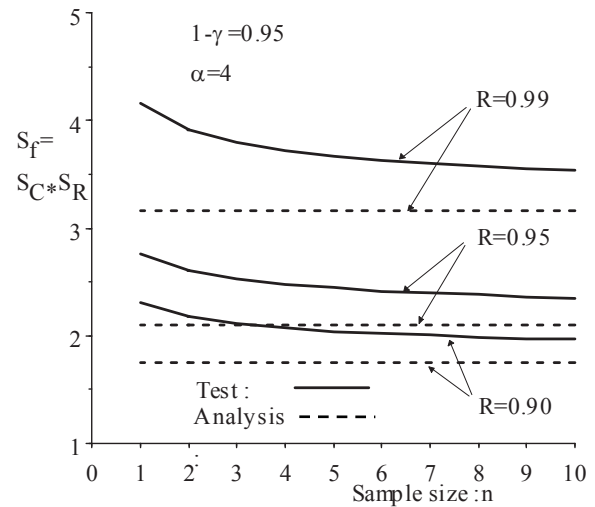


図 4 試験および解析評価の  $S_f$



全率:  $S$  が(14)式に定義される。フリートサイズを  $M$  とすると、 $N_1$  の pdf:  $f_{N_1}(N_1)$  は(15)式で表される。

$$S = \underline{\beta} / N_1 \quad (14)$$

$$f_{N_1}(N_1) = \frac{\alpha}{(\beta / M^{1/\alpha})} \left\{ \frac{N_1}{(\beta / M^{1/\alpha})} \right\}^{\alpha-1} \exp \left\{ - \left\{ N_1 / (\beta / M^{1/\alpha}) \right\}^\alpha \right\} \quad (15)$$

上記の 2 式および先の(4)式の  $f(\underline{\beta})$  から  $S$  の pdf が次式に求まる。

$$f_S(S) = \frac{\alpha M n^{n+1} S^{\alpha n-1}}{(M + n S^\alpha)^{n+1}} \quad (16)$$

A.M.Freudenthal は、(16)式の  $S$  の分布において、ある  $S_f$  以下の確率のレベルを  $R$  として、この信頼度:  $R$  に対する  $S$  の上限を  $S_f$  と定義している。この定義は次の(17)式で示されるので、これから  $S_f$  は(18)式で得られる。

$$R = \int_0^{S_f} f_S(S) dS = \left\{ \frac{n S_f^\alpha}{M + n S_f^\alpha} \right\}^n \quad (17)$$

$$S_f = \left\{ \frac{M R^{1/n}}{n(1 - R^{1/n})} \right\}^{1/\alpha} \quad (18)$$

以上から明らかなように、(18)式の疲労寿命安全率は **TTF** や個々の機体構造の信頼度とは関連のない表示となっていることから、疲労寿命安全率  $S$  の信頼度レベルがどのような意味を有するのか、 $S_f$  の定義としては問題のあるところと考えられている。(17)式の  $R$ 、すなわち  $S_f$  の累積分布を計算すると、その結果が図 5 で表される。本図から、ある信頼度に対して標本数  $n$  が増えると  $S_f$  も増加する傾向が見られ、従前のいわゆる  $S_f$  の考え方とは逆になっている。

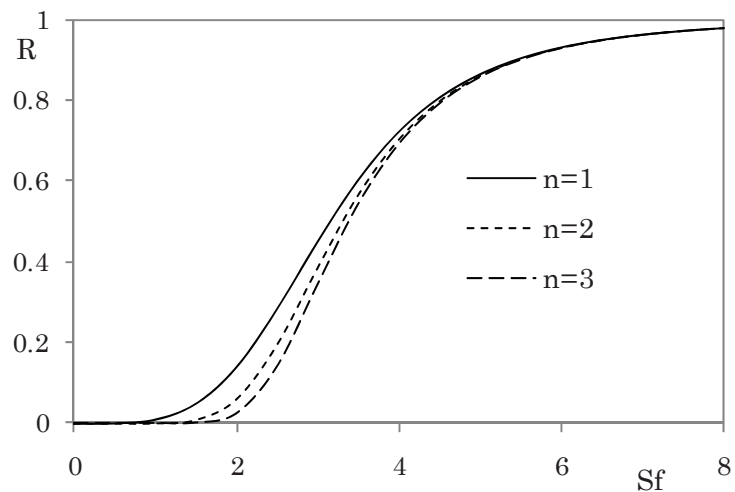


図 5 フリートの大きさ  $M=100$  の例における  $S_f$  累積分布

### 2.3 ベイズの方法による評価

上記の定義を改善すべき評価法として、板垣のベイズ評価法<sup>10,11)</sup>を取り上げる。第 5 章にベイズ理論を応用した寿命安全率の評価例を示すが、ここでは最初に、ベイズの定理について概略を記す。

#### 2.3.1 ベイズの定理

ベイズの定理は英国の Thomas Bayes(1702-1761)によって導かれた条件付確率の発展型定理である。最近ではナビゲーション等を始めとして、情報を有効に引き出す広範囲の分野に応用されている。本文のベイズ理論の応用では従来の統計処理(頻度解析)とは異なる考え方で未知要因や母数の推定を行うが、工学的な優位点は従来の統計解析では扱うことができない定性的な情



表 3 従来の統計的手法とベイズ評価の比較

従来の統計的評価（頻度解析）	ベイズの方法
<ul style="list-style-type: none"> <li>・対象構造や構造部位のデータベースから母数推定値として唯一の値を採用</li> <li>・定性的な情報の扱いは不可能</li> <li>・損傷データがない場合には少なくとも一度の損傷ありと想定した保守側の判断を適用</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・推定母数を不確定変数として扱う</li> <li>・過去の経験、工学的判断等の非客観性の情報も積極的に活用可能</li> <li>・類似機器の情報も適切に導入可能</li> <li>・発展型として、事前、事後評価の推定課程で主観的不確定性要因の評価が可能</li> <li>・損傷ゼロも統計的情報として導入</li> </ul>

報を導入できることにある<sup>10)</sup>。すなわち、得られる情報が少ない場合に、エンジニアリング・センス（工学的判断）等の主観的な情報を確率統計の世界に導入できる利点が挙げられる。

2.1 節の片側許容限界の設定では、試験結果等の観測値を基にして、本来は定数である確率分布の母数  $\theta$  についてある幅を持って推定した。したがって、信頼度の推定にも信頼水準という幅が与えられ、これを基準として不確定性を評価した。これに対してベイズ法では、試験結果が確率変数であると同時に、母数  $\theta$  そのものも確率変数という立場に従う。したがって、 $\theta$  に関する情報を可能な限り活用できることがベイズ法の有用な特徴である<sup>10)</sup>。従来の統計解析手法とベイズ法の比較を表 3 にまとめる。

具体的に、評価試験の実施前に未知母数  $\theta$  に関して何らかの情報、例えば工学的判断とか  $\theta$  に関連する判断材料等が定性的に得られたとする。ベイズの方法の最大の特徴は、過去の経験とかエンジニアの判断等の主観的予測を導入し、確率統計のベイズの定理を基本として、客観的な情報不足を補えることである。ベイズ定理の証明を連続分布の形で示すと(19)式になる。

$$f^{(1)}(\theta | E) = \frac{P(E | \theta) f^{(0)}(\theta)}{\int P(E | \theta) f^{(0)}(\theta) d\theta} \tag{19}$$

上式の  $\theta$  はこれから推定する未知母数（あるいは未知要因）を示し、 $E$  は試験結果取得等の客観的な生起事象を表す。事象  $E$  の生起確率を未知母数  $\theta$  の条件付確率として  $P(E | \theta)$  で示す。右辺の  $f^{(0)}(\theta)$  は、試験を実施する前の  $\theta$  に対する事前の予測であり、いわゆる頻度評価としての形式ではなく、 $\theta$  に関する主観的な考え方を  $f^{(0)}(\theta)$  としてその形を形成して、主観確率として表現したものである。この  $f^{(0)}(\theta)$  の主観確率が、試験結果  $E$  の客観的情報の生起確率  $P(E | \theta)$  によって、ベイズの定理を用いて左辺  $f^{(1)}(\theta)$  へ更新される。事前の主観量  $f^{(0)}(\theta)$  が試験結果  $E$  によって、 $f^{(1)}(\theta)$  という形に再評価されたことになる。これを事後確率と称する。また、さらなる情報が得られた場合には、この  $f^{(1)}(\theta)$  を右辺の  $f^{(0)}(\theta)$  に置き換えて、新たに得られた事象の生起確率  $P(E | \theta)$  を導入して再計算する。そして更新された左辺  $f^{(1)}(\theta)$  が、最新の情報に基づく  $\theta$  に対する推定結果を与える。このように、ベイズの定理 (19) 式は、逐次得られる情報に対する巡回関係も示しており、確率事象の  $P(E | \theta)$  が表現(確率モデル化)できれば、未知母数  $\theta$  の推定が機械的に行えることを示している。

### 2.3.2 ベイズの方法による疲労寿命安全率の評価

$n$  回の試験結果から得た情報を基に、目的の信頼度  $R$  を保つためには  $Sf$  をどれほどに設定するか、また標本数  $n$  によって  $Sf$  がどう変わるか、ある  $Sf$  の時に  $R$  と  $n$  は如何なる関係になるか、標本数設定に必要な情報を、ベイズ法を用いてワイブル分布を対象にこれらの項目を評価する<sup>11)</sup>。

ベイズ法では未知の尺度母数  $\beta$  を試験結果である尤度を用いて直接推定するが、尺度母数  $\beta$  の推定において主観的な扱いが可能であることが最尤推定法とは異なる。この  $\beta$  に対する事前の推定は過去の経験や判断等が導入され、その後に客観情報である試験結果によって、推定対象が明らか

になってゆく。尺度母数の事前分布を  $f^{(0)}(\beta)$  と記すと、試験後の事後分布は次式に書ける。

$$f^{(1)}(\beta | \underline{\beta}) = \frac{\frac{n^n}{\Gamma(n)} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\underline{\beta}}\right)^{n-1} \exp\left\{-n(\beta/\underline{\beta})^\alpha\right\} \cdot f^{(0)}(\beta)}{\int_{\underline{\beta}} (\text{Numerator}) d\beta} \quad (20)$$

試験結果を得た後の信頼度は、上記の尺度母数の事後分布を用いて、ベイズ的期待値として次式で表すことができる。

$$R(N | \underline{\beta}) = \int_{\underline{\beta}} \exp\{-(N/\beta)^\alpha\} \cdot f^{(1)}(\beta | \underline{\beta}) d\beta \quad (21)$$

(21)式から明らかなように、事前密度  $f^{(0)}(\beta)$  の採り方によって得られる期待信頼度は異なる。情報が事前に得られない場合には、未知母数  $\beta$  に対する確信の度合いを一定にした一様分布が用いられるが、他方、式の展開が有利になる事前分布関数が採られることもある。前者の一様事前分布と、後者の非報知事前分布<sup>10,11)</sup>としての例を、各々以下に示す。

$$f^{(0)}(\beta) = \text{const.} \quad (22)$$

$$f^{(0)}(\beta) \propto 1/\beta \quad (23)$$

上記  $\beta$  の事前分布を(20)式へ代入して事後分布を得た後、信頼度の期待値  $\underline{R}$  が(21)式を用いて得られる。上記 2 つの事前分布に対応する期待信頼度は各々以下に計算される<sup>10)</sup>。

$$R[N | \underline{\beta}] = \left\{ \frac{S_f^\alpha}{S_f^\alpha + 1/n} \right\}^{n-\alpha} \quad (24)$$

$$\underline{R}[N | \underline{\beta}] = \left\{ \frac{S_f^\alpha}{S_f^\alpha + 1/n} \right\}^n \quad (25)$$

本式を用いることによって、目的の疲労寿命に対する安全率  $S_f$  が定められる。すなわち、試験結果から  $\underline{\beta}$  が得られた場合に、寿命  $N$  が  $\underline{\beta}/S_f$  より大きい確率、 $\text{Pr}=[N > \underline{\beta}/S_f]$  を満たすように  $n$  を決めることになる。(25)式を用い、 $\alpha=4$  の場合の疲労寿命安全率  $S_f$  と標本数  $n$  の関係を 3 種類の目標信頼度、 $R=0.90, 0.95, 0.99$  に対して求めると図 6 に表される。本図の信頼度の期待値 (実線:  $R_M$  線図) から  $S_f$  は  $n$  に依存しないことが伺えるが、(24)および(25)式はベイズの方法による信頼度の期待値から求めた結果であり、真の信頼度が小さい場合もあるためにこのように一義的に  $S_f$  と  $n$  の関係を決定できない。ベイズ法において、(22)および(23)式に示す推定範囲を持った  $\beta$  に対する確信の度合いを事前情報として導入しているため、(24)と(25)式が真の信頼度を示すものではない。したがって推定信頼度もある範囲を有する確率変数となるが、これに対しては(26)式に示す推定信頼度  $\underline{R}$  の分散から得た(27)式で表される標準偏差  $\sigma_R$  を考えることによって、(28)式の  $\underline{R}$  の下限値  $R_L$  が求められる。

$$\sigma_R^2 = \int_{\underline{\beta}} [\exp\{-(N/\beta)^\alpha\}]^2 \cdot f^{(1)}(\beta | \underline{\beta}) d\beta - \underline{R}^2 \quad (26)$$

$$\sigma_R = \left[ \{S_f^\alpha / (S_f^\alpha + 2/n)\}^n - \{S_f^\alpha / (S_f^\alpha + 1/n)\}^{2n} \right]^{1/2} \quad (27)$$

$$R_L = \underline{R} - k \cdot \sigma_R \quad (28)$$

(28)式から得た、 $R=0.90, 0.95, 0.99$  に対する  $S_f$  と  $n$  の関係を点線( $k=1$ )および一点鎖線( $k=2$ )に

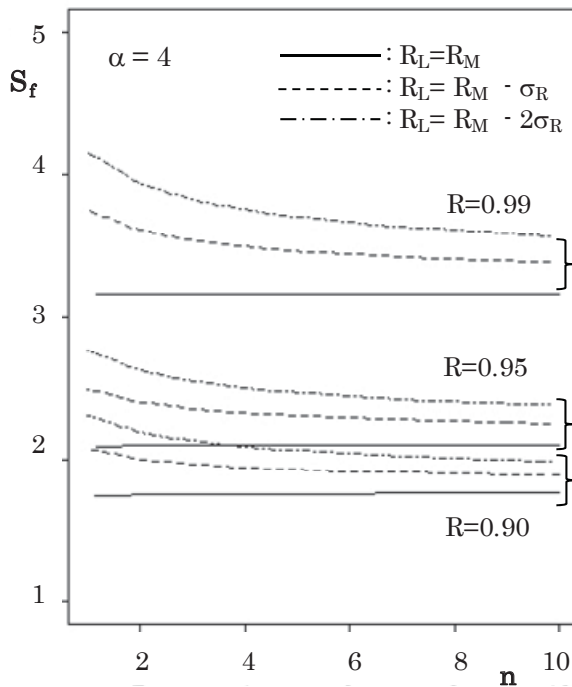


図6 信頼度下限値のベイズ評価

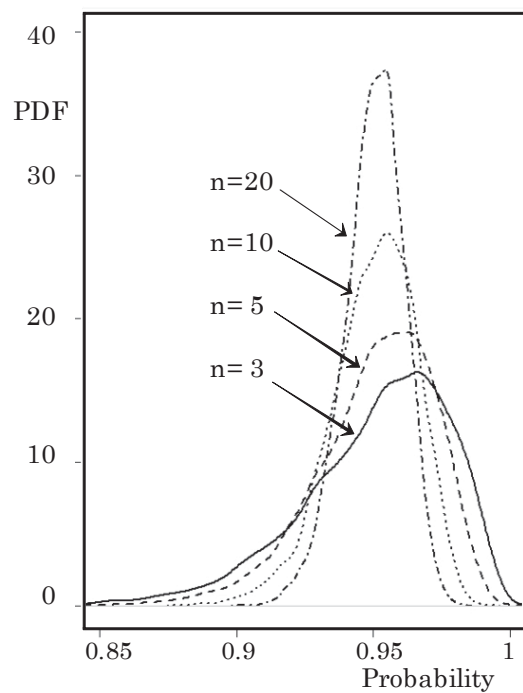


図7 真の信頼度のばらつき

よって同図に示すが、安全寿命に対する試験標本数  $n$  の影響が表れていることが分かる。

### 2.3.3 信頼度の変動

ここで真の信頼度がどれほどの確からしさをもって得られるのか、数値シミュレーションを応用して検証する<sup>10)</sup>。(1)式に従うワイブル乱数を  $n=3, 5, 10, 20$  個発生させて得た  $\beta$  と  $R=0.95$  に相当する  $Sf(\alpha=4$  のとき  $Sf=2.1$ ) から、 $\exp\{-\beta/Sf^\alpha\}$  を真の信頼度として 10,000 回ほどシミュレーションを行い、その結果をプロットしたものを図 7 に示す。信頼度がどのような広がりを持つかという、例えば  $n=3$  では信頼度のばらつきが  $\sigma_R=0.028$ 、信頼度の下限界値  $R_L$  は  $R_L=0.95 \cdot \sigma_R=0.922$  となり、これは信頼度  $R$  が  $R_L$  よりも大きい確率が 92.2%であることを示している。本図から  $n$  の増加とともに真の信頼度のばらつきは少なくなっていることがわかる。

## 3. 疲労寿命を対数正規分布とする疲労寿命安全率

安全寿命推定の具体的手順は、疲労荷重スペクトルの同定と対象部位材料の疲労試験結果(S-N線図)の取得、そして通常は Palmgren Miner 則を適用する変動荷重下での疲労寿命の推定の各段階を経る。疲労寿命はばらつきが大きいことから、仮定される確率分布としては第 2 章のワイブル分布、そして以下に述べる対数正規分布が基本モデルである。この章では常用対数の疲労寿命評価を基本に、対数正規分布に基づく疲労寿命安全率の評価を記す。

未知母数である平均値や標準偏差を求めるには同種構造材料や部位に対する疲労試験データを参照するが、同じアルミ合金でも単純試験片と構造部位の結果では、疲労寿命の標準偏差  $\sigma$  が異なることが報告されている<sup>12)</sup>。例えば単純試験片では  $\sigma=0.300$  で、一方、構造部位では  $\sigma=0.176$  という結果が得られているが、この主要要因は試験荷重スペクトルや応力集中係数の相違であると想定される。しかし、さまざまな構造形態に対して疲労データが十分に得られている状況は一般に希であり、通常は取得された資料の範囲では同一の母数値を持つものと仮定して未知母数の推定を行う。以下では、対数正規分布を仮定した疲労寿命分布における平均値と標準偏差の推定について記す。

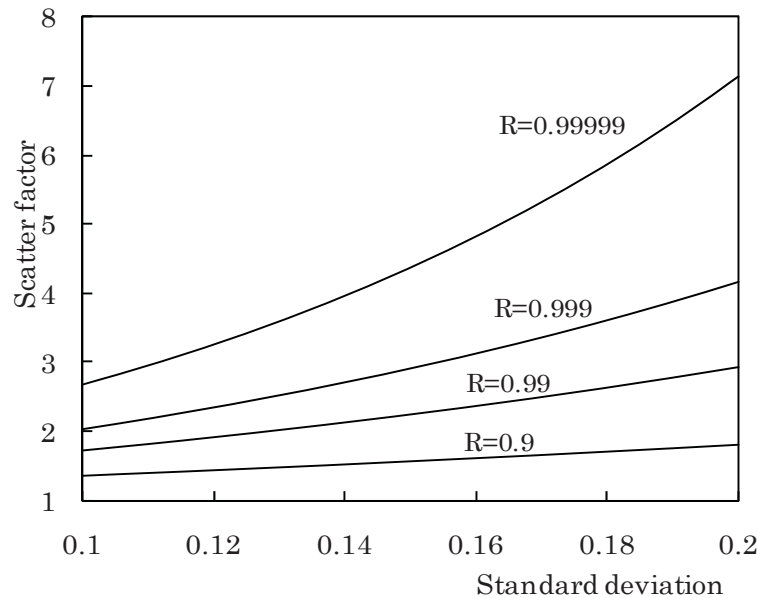


図8 対数正規分布モデルにおける標準偏差とScatter factor

### 3.1 疲労寿命の平均値の推定

対象部位の疲労寿命  $N$  の常用対数  $x = \log N$  の平均値  $\mu$  が未知で、標準偏差  $\sigma$  を既知とした評価モデル<sup>13)</sup>を考える。疲労寿命の確率を  $P$ 、累積標準正規確率を  $\Phi(\cdot)$ 、そして安全寿命を  $N_p$  とすると、安全寿命（対数） $x_p$  は次式で表される。

$$x_p = \mu - k_p \cdot \sigma \quad (29)$$

$$P = \Phi(k_p), \quad x_p = \log N_p \quad (30)$$

マイナー則において累積被害が1の時の部材の疲労寿命を  $N_M$  とすると、(29)式は次の(31)式に表せるが、寿命  $N_M$  や標準偏差  $\sigma$  は荷重や材料、負荷応力や応力集中係数などに依存する。

$$x_p = \log N_M - k_p \cdot \sigma \quad (31)$$

信頼度は  $R = 1 - P$  であり、また疲労寿命安全  $S_f$  は(29)および(30)式を用いて次式に書ける。

$$S_f = \frac{10^\mu}{N_p} = 10^{k_p \cdot \sigma} \quad (32)$$

ここで標準偏差  $\sigma$  と疲労寿命安全率  $S_f$  を目標信頼度で媒介表示すると、図8になる。

実機疲労試験の標本数は1または2であろうから、前述したワイブル分布の評価と同様に、小数標本で安全寿命を保証するための信頼性係数（信頼水準）を導入しなければならない。標本数  $n$  の場合の平均値  $\mu$  は、信頼水準  $1 - \gamma$  を用いて推定できる。これらの評価式を(33)に示す。

$$\mu = \bar{x} - \frac{k_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \quad (33)$$

表 4 YS-11 機開発時及び改訂時の Scatter factor<sup>16)</sup>

Sample n	British Civil Airworthiness Requirements	Australian Civil	U.S.A.	Japan (Prototype)	Japan (Revised)
1	6.0	7.5		7.5	7.2
2		5.70		6.3	6.3
3	4.5	5.17		5.9	5.9
4		4.90	2 to 4	5.6	5.7
5		4.75		5.5	5.6
6	3.5	4.62		5.3	5.5
10				5.1	

ただし、 $\underline{N} = (\prod_{i=1}^n N_i)^{1/n}$ ,  $\underline{x} = \log \underline{N}$   $1 - \gamma = \Phi(k_\gamma)$  である。

ここで (32)式に信頼水準の項(33)式を加味すると、最終的に安全寿命(対数)  $x_p$  と Sf は以下に示される。(補記 2)

$$x_p = \mu - k_p \cdot \sigma = \underline{x} - (k_p + \frac{k_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}}) \cdot \sigma, \quad P = \Phi(k_p) \tag{34}$$

$$S_f = 10^{(k_p + k_{1-\gamma} / \sqrt{n}) \cdot \sigma} \tag{35}$$

以上は国産旅客機 YS-11 開発時期に適用された評価手順<sup>13),14)</sup>であるが、既知であると仮定した当時のアルミ合金の対数疲労寿命の標準偏差に対しては、大略 0.15 から 0.2 の値が用いられていた。代表例は R.J. Atkinson の示した  $\sigma=0.176(\log 1.5)$ <sup>15)</sup>である。YS-11 開発時には疲労データが皆無であったため、この値の 10% 増しの  $\sigma=0.194$  が適用された。また疲労破壊確率は 0.13%( $k_p=3.01$ )、そして信頼水準は 90%( $k_\gamma=1.28$ )に設定された。これらの条件を基に(35)式の疲労寿命安全率 Sf を計算すると表 4 になる。(35)式を適用し、また修正計算を実施した後、胴体構造では  $n=1$  で  $Sf=7.5$ 、また主翼は両翼で  $n=2$  であるから  $Sf=6.3$  と計算された<sup>16)</sup>。

### 3.2 標準偏差 $\sigma$ の推定

標準偏差を試験によって評価する場合には  $\chi^2$  分布を用いた以下の手順に従う。ワイブル評価と同様に、対数疲労寿命の標準偏差の推定には多くの情報が必要である。しかし、通常は多量の試験情報が得られないため、対象部位と同種、同一と見なすことができる材料の疲労試験結果を、標準偏差を同一とした母集団からの標本と解釈して評価に導入する。試験結果で、ある標本の j 番目の組について、その標本数を  $n_j$ 、常用対数を取った標本分散を  $S_j^2$  とすると、正規母集団からの標本の平方和が  $\chi^2$  分布と関連すること、および  $\chi^2$  分布の再生性を適用すると、試験標本の組総数  $n_s$  と標本全体の標準偏差  $\sigma$  は(36)式に表される。ここで、 $n_s$  は試験標本の組数の総数を示す。

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{\chi^2} \sum_{j=1}^{n_s} n_j \cdot S_j^2 \right\}^{1/2} \tag{36}$$

ここで上式の  $\chi^2$  は自由度  $\nu$  の  $\chi^2$  変数であり、次式で計算される。

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{n_s} \chi_j^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_s} n_j S_j^2, \quad \nu = \sum_{j=1}^{n_s} (n_j - 1) = \sum_{j=1}^{n_s} n_j - n_s \tag{37}$$

なお、各組の統計量、すなわち j 組の  $\chi_j^2$  値、自由度  $\nu_j$ 、そして標本分散  $S_j^2$  を次式に示す。



$$\chi_j^2 = \frac{n_j S_j}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2, \quad \nu_j = n_j - 1, \quad S_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2 \quad (38)$$

自由度  $\nu$  が 30 以上であれば  $\chi^2$  分布は正規分布に近似される。ここで  $Y_\nu$  が自由度  $\nu$  の  $\chi^2$  分布であるとき、変数  $(2Y_\nu)^{1/2}$  は  $N[(2\nu-1)^{1/2}, 1^2]$  の正規分布で近似できること、すなわち、 $u=(2Y_\nu)^{1/2}-(2\nu-1)^{1/2}$  は  $N[0, 1^2]$  であることを用いると、(37)式の  $\chi^2$  値は次式で計算される。なお、 $u_{1-\gamma}$  は標準正規分布における  $(1-\gamma)*100\%$  点を示す。

$$\chi^2 = \frac{1}{2}(u_{1-\gamma} + \sqrt{2\nu-1})^2 \quad (39)$$

上記の試験データに基づく標準偏差の再評価と、これを適用した安全寿命の再評価が、前述した YS-11 開発時の疲労寿命安全率の改正に対して実施されている<sup>16)</sup>。これを以下にまとめる。

### 3.3 疲労寿命安全率と破壊確率

YS-11 機開発以後に実施された機体構造各部位に対する 62 組の疲労試験結果を用いて、疲労寿命分布の標準偏差  $\sigma$  の見直しが行われた。その結果、(37)式の自由度  $\nu$  は 137 となり、また  $\sum n_j S_j^2 = 2.639$  と算出された。これらの結果を用いた対数疲労寿命の標準偏差  $\sigma$  の計算値を表 5 に示す。一方、Butler は Whittaker らの編集データに対数正規分布モデルを適用して標準偏差を求めて、スクリーニングのない総データに対して  $\sigma=0.156$ <sup>17)</sup> を導出した。この結果と表 5 の結果から、YS-11 機の疲労寿命安全率の改正値として、信頼水準  $1-\gamma=0.95$ 、 $\sigma=0.154$  が設定された<sup>16)</sup>。

疲労寿命安全率の計算にあたり疲労破壊の基準確率を想定するが、これについては国際民間航空機関(International Civil Aviation Organization: ICAO)の耐空性委員会の推奨値<sup>18)</sup>、航空機の運用寿命までの致命破壊確率値  $10^{-5}$ 、すなわち正規確率のパーセント点  $k_p=4.26$  が参照された。これらの値から求めた改正疲労寿命安全率を、先の開発時の Sf と併せて表 4 の最右列に改めて示す。開発初期の値とそれほど大きな変化はないことが示されている<sup>13), 16)</sup>。なお、構造破壊確率とは異なるが、米連邦耐空性規定(Federal Aviation Regulation: FAR)および西ヨーロッパ共同機構基準(Joint Aviation Requirements: JAR)<sup>20)</sup>が要求している、輸送機の搭載機器やシステムに対する 1 時間当たりの故障確率の定義を表 6 に示す。この定義は構造疲労評価にも応用されており、たとえば、破壊確率  $P=0.05$  の場合で設計寿命が 60,000 飛行時間であるとき、表 6 の定義によると単位飛行時間当たりの破壊確率は  $10^{-6}$  の”Major”の域となる。

表 5 対数疲労寿命の標準偏差<sup>16)</sup>

項目	記号	結果			
信頼水準	$1-\gamma$	0.50	0.90	0.95	0.99
$(1-\gamma)\%$ 点	$u_{1-\gamma}$	0	-1.28	-1.64	-2.33
$\chi^2$ 値	$\chi^2$	136.5	118.2	110.7	100.7
標準偏差	$\sigma$	0.139	0.149	0.154	0.162

表 6 危険事象の定義と生起回数

事象	定義	生起回数(1/h)	
		>5700kg	<5700kg
Catastrophic	航空機と多数の人命の損失	$10^{-8}$	$10^{-7}$
Hazardous	安全余裕の大減少	$10^{-7}$	
Major	安全余裕の重大な減少	$10^{-6}$	

3.4 ベイズの方法による疲労寿命安全率の評価

2.3 節のワイブル分布評価と同様に、対数正規分布寿命モデルにベイズ法を応用する<sup>22)</sup>。N を寿命として、ここではその自然対数を  $z = \ln N$  と記し、 $z$  が  $N[\underline{\mu}, \sigma^2]$  となることを前提に置く。(20) 式と同様にして、寿命データ  $N_1, \dots, N_n$  ( $z_1 = \ln N_1, \dots, z_n = \ln N_n$ ) が得られた後、未知母数  $\mu$  の事後分布は正規分布の再生性を用いると、(40) 式の  $N[\underline{\mu}, \sigma^2/n]$  になる。

$$f^{(1)}(\mu | \underline{\mu}) = \frac{[\prod_{i=1}^n [\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(z_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\}]] \cdot f^{(0)}(\mu)}{\int_{\mu} (Numerator) d\mu} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{n(\mu - \underline{\mu})^2}{2\sigma^2}\} \quad (40)$$

$$\underline{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (41)$$

事後分布から  $z$  の分布、すなわち寿命分布は次式に示す  $N[\underline{\mu}, \sigma^2(n+1)/n]$  に従う。

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) f^{(1)}(\mu | \underline{\mu}) d\mu = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n+1}} \exp\{-\frac{n(z - \underline{\mu})^2}{2\sigma^2(n+1)}\} \quad (42)$$

これからベイズ的期待信頼度<sup>10)</sup> (事後分布による  $R$  の期待値)  $\underline{R}$  は、目標寿命を  $z_R$  とすると、

$$\underline{R}(z_R) = \int_{z_R}^{\infty} f(z) dz, \quad \underline{P}(z_R) = 1 - \underline{R}(z_R) \quad (43)$$

また、実証寿命の平均値  $\underline{\mu}$  の(41)式と上記(43)式の  $z_R$  の比として、 $Sf$  が次式で示される。

$$Sf = \frac{\underline{\mu}}{z_R} \quad (44)$$

(43) 式を図 9 に示すが、信頼度  $R(z)=0.9$  の例で明らかのように、この信頼度を満たす対数寿命は  $z_{n=1} < z_{n=100}$  であり、(44) 式から  $n$  が大きくなるとともに  $Sf$  が小さくなることがわかる。これは正規分布では平均値に関して対称であること、および中心極限定理に依存する。

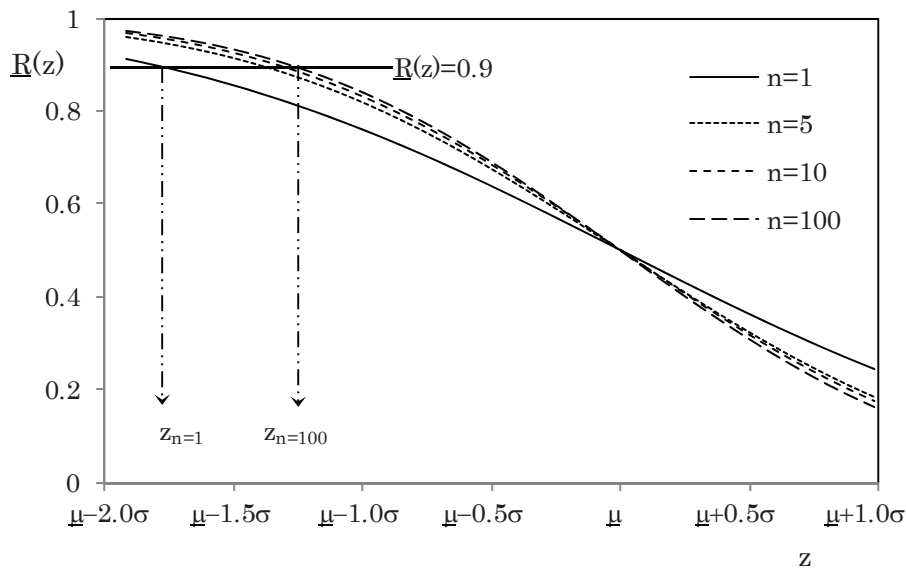


図9 対数正規分布に対するBayesモデルの標本数と信頼度



#### 4. 疲労寿命安全率に対する関連研究

##### 4.1 FTOSE による疲労寿命安全率の検討

朝田らは、Whittaker らの手法<sup>6)</sup>と同様にして、YS-11 に対する疲労寿命安全率の見直しで用いられた疲労試験データ 62 組(m=62)の情報を基に、N.R.Mann の FTOSE (順序統計) を用いて形状母数 $\alpha$  の推定を行っている<sup>19)</sup>。以下にこの解析法の大略を示す。各組の標本数を  $n$  とし、最初に  $n$  個の試験結果の中で最小寿命側から 2 つのデータ、 $x_1$  および  $x_2$  を取り出し、その比を  $z=x_2/x_1$  とする。この  $z$  の pdf は順序統計から次式に表される。

$$f(z) = \frac{n(n-1)\alpha z^{\alpha-1}}{\{1+(n-1)z^\alpha\}^2} \quad (45)$$

ここで計算の簡略化のために、形状母数 $\alpha$ を直接推定する代わりに、 $\alpha$ の逆数 $\varepsilon=1/\alpha$ を推定する。(45)式から $\varepsilon$ の最尤推定値を求めると、最終結果 $\underline{\varepsilon}$ として次式が得られる。

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\ln z}{n \ln(n/n-1)} \quad (46)$$

また分散は(47)式になる。

$$V[\underline{\varepsilon}] = c^2 \left\{ 2ny \left( \frac{n}{n-1} \right) - \frac{1}{c^2} \right\} \quad (47)$$

ここで、

$$c = \frac{1}{n \ln(n/n-1)} \quad (48)$$

$$y(x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-x)^i}{i^2} \quad (\text{Spence 積分}) \quad (49)$$

次に、試験データの各組( $j=1, \dots, m$ )の情報  $\underline{\varepsilon}_j$  から $\varepsilon$ を推定するが、 $\underline{\varepsilon}$ の pdf は不明であるため、最小二乗法を用いて分散を最小にする最良不偏推定量  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ 、およびその分散  $V[\underline{\underline{\varepsilon}}]$ を導くと、各々次式で示される。

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\sum_{j=1}^m \underline{\varepsilon}_j / A_j}{\sum_{j=1}^m 1/A_j}, \quad A_j = c_j^2 \left\{ 2n_j y \left( \frac{n_j}{n_j-1} \right) - \frac{1}{c_j^2} \right\} \quad (50)$$

$$V[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \frac{\varepsilon^2}{\sum_{j=1}^m 1/A_j} \quad (51)$$

ここで $\varepsilon$ の分布が不明であるので、 $\underline{\underline{\varepsilon}}$ から $\varepsilon$ を推定するには信頼水準  $1-\gamma$ を考慮して、次式の Tchebycheff 不等式を適用する。

$$\text{Pr.} \left\{ \varepsilon \leq \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}}{1 - B_{1-\gamma}} \right\} \geq 1 - \gamma, \quad B_{1-\gamma} = \left\{ \gamma \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{A_j} \right) \right\}^{-1/2} \quad (52)$$

前記 62 組のデータから各  $z_j=x_{2j}/x_{1j}$  と、(46)式による $\underline{\underline{\varepsilon}}$ の計算を経て、(50)式から $\underline{\underline{\varepsilon}}$ を求めると、 $\underline{\underline{\varepsilon}}=0.251(1/\underline{\underline{\varepsilon}}=\underline{\underline{\alpha}}=3.98)$ と算出される。

ここで寿命  $N$  が 2 母数ワイブル分布  $F(N|\alpha, \beta)$  に従うとき、変数  $\log N$  の分布に対する標準偏差

$\sigma$ と形状母数 $\alpha$ の関係は次の(53)式で表すことができる<sup>19),21)</sup> (補記 3)。

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6 \ln 10} \cdot \sigma} \tag{53}$$

表 5 で示した  $1-\gamma=0.50$  の  $\sigma=0.139$  を(53)式へ代入すると  $\alpha=4.0$  になり、上記関係を満たしている。なお、Tchebycheff 不等式ではデータが十分にある場合に良好な推定値を得られるが、この例の 62 組では情報量が十分とはいえない。そこで朝田らは、表 5 の  $1-\gamma=0.95$  の  $\sigma=0.154$  を(53)式へ代入して  $\alpha=3.62$  を得て、上記  $\alpha=4.0$  の場合と疲労寿命安全率計算の比較検討を行っている。 $\sigma=0.154$  とした対数正規分布モデルと  $\alpha=3.62$  のワイブル分布モデルを適用した比較の一例を表 7 に示す。双方ともに目標信頼度  $R$  を  $0.99999$  (破壊確率  $Pf=10^{-5}$ ) とした結果であるが、ワイブル分布モデルに基づく  $Sf$  値は対数正規モデルの  $Sf$  値に比較して数倍になっている。これは破壊確率が小さいほど両分布の裾野の違いが大きくなって、ワイブル分布の  $Sf$  が大きく推定される。

ここで、両分布についてより具体的な数値を用いてワイブル確率紙の上で比較する<sup>21)</sup>。数値例を図 10 に示すが、安全寿命目標値  $N_{R,1-\gamma}$  を 30,000 飛行時間とし、累積破壊確率を 0.1%(信頼度は 0.999)の場合について(11)式および(35)式を用いて  $Sf$  を計算して、標本数  $n$  に対応する試験寿命(標本特性値)をプロットしたものである。なお、対数正規分布では  $\sigma=0.154$  とし、また 2 母数

表 7 対数正規分布モデルと 2 母数ワイブル分布モデルに基づく Scatter factor ( $Pf=10^{-5}$ )

Sample size n	Lognormal	2 母数 Weibull
1	7.15	21.9
2	6.26	21.0
3	5.90	20.5
4	5.70	20.2
5	5.56	20.0
6	5.46	19.8
10	5.24	19.4

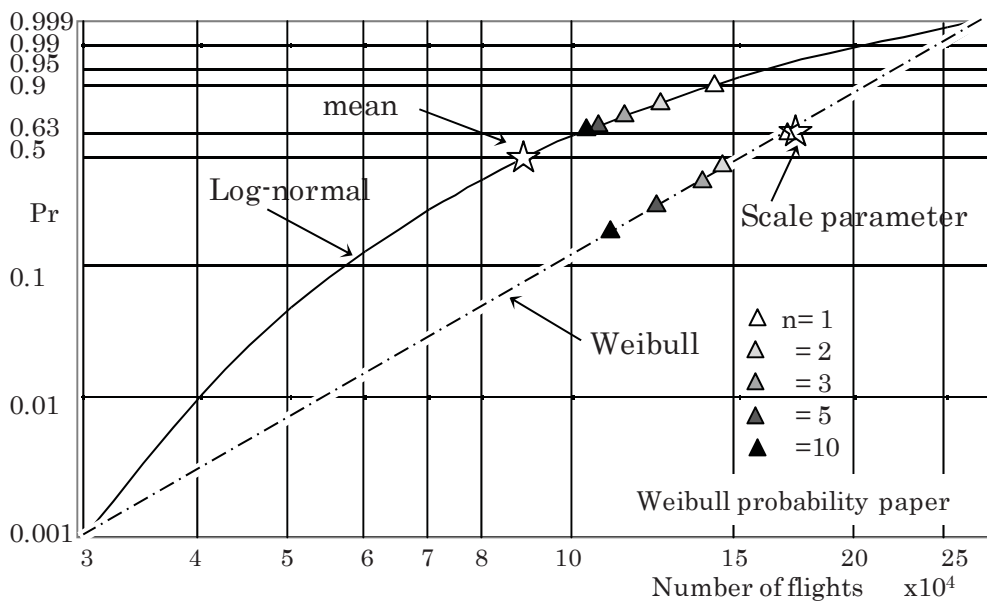


図10 対数正規分布と 2 母数ワイブル分布における安全寿命と標本特性値の比較<sup>22)</sup>

数ワイブル分布の形状母数を $\alpha=3.62$ とした。平均値ならびに尺度母数も図示するが、信頼度を保証するための試験標本数  $n$  と要求試験寿命などの点も表している。前述したように、ワイブル分布の方が試験寿命 (Sf 値) は厳しく設定されており、両分布の裾野の違いが如実に表れている。

#### 4.2 3母数ワイブル分布の適用

朝田は、前節に記した FTOSE の手法を、さらに 3 母数ワイブル分布の各母数推定に導入して、これらの定式化を行っている<sup>23)</sup>。ここではその概略を記す。位置母数 $\delta$ と尺度母数 $\beta$ の比 $\varepsilon = \delta/\beta$ が等しいという条件を新たに設定して、順序統計量  $z=N_1/N_2$  の分布関数  $G(z)$  を導出し、これを基に形状母数 $\alpha$ と上記の比 $\varepsilon = \delta/\beta$ を、試験結果と $(\alpha, \varepsilon)$ を媒介変数とした  $G(z)$  曲線との一致適合性を指標として、最小二乗法によって最適な $(\alpha, \varepsilon)$ 組を求めている。(54)式に導出された  $G(z)$  を示す。

$$G(z) = 1 - n\alpha \int_{\varepsilon}^{\infty} (y_1 - \varepsilon)^{\alpha-1} \exp[-\{(y_1 - \varepsilon)^{\alpha} + (n-1)(zy_1 - \varepsilon)^{\alpha}\}] dy_1, \quad y_1 = N_1/\beta \quad (54)$$

しかし適切な推定値 $(\alpha, \varepsilon)$ を得ることが困難であるため、Bayse 法を適用して最も確信の高い推定値 $(\alpha, \varepsilon)$ を得ることを試みている。そして、先に述べた YS-11 に関する 62 組の試験データを用いた解析の結果、 $(\alpha, \varepsilon)=(3.6, 0.02)$ の推定値が得られている。この数値例では位置母数の推定値が尺度母数に比して2%程度ではあるが、形状母数 $\alpha$ と $\varepsilon$ の組み合わせの設定、そして目標信頼度  $R$  の採り方等によって、Sf の推定結果は大きく変動することが明らかにされた。その要因は情報量、すなわち試験データが少ないことがあげられるが、3 母数ワイブル分布の母数推定法については確定した手法はなく、情報量がそれほど期待できない Sf 評価に対しては、現状では 3 母数ワイブルモデルの適用は難しいと考えられる。

3 母数ワイブル分布の母数推定の評価法についてはいくつかのモデルが提案されているが、推定法の分布特性やその優劣を比較した検討はあまりなされてはいない。これに対して、酒井らは標本数とともに推定値の変動および収束状況をモンテカルロ法を用いて詳細に調査して、いくつかの推定モデルの比較を行っている<sup>24)</sup>。その中では、ワイブル確率紙上で実験点との相関を最大にする位置母数を最初に求め、次に尺度母数と形状母数を最小二乗法によって求める手法が最良であると結論している。この方法は、標本数が少なくとも 30 から 50 点は期待できるような、一種類の材料試験結果から未知母数を推定する場合に有効な手法である。しかし今までに述べたように、これを Sf の評価に適用できるものではなく、得られる情報源や情報特性によって、情報に対する工夫が必要である。そこで次に、情報源の拡張という観点から Sf の検討例を示す。

### 5. 広範囲の不確定性に対するベイズ信頼性解析

機体構造の疲労強度の実証試験では、小さなクープン試験片を数多く実施して統計的な評価を得る場合とは異なり、試験装置の規模や経済的な制約から試験供試体の数が重要な問題となる。不確定要因や未知母数を精度良く推定するには多くの標本が必要であるが、一般に標本が十分に完備されることは希である。そのため、第 2 章に記したように、従来から信頼性評価においては推定誤差の程度を信頼性水準で表現している。得られるデータが不十分であるとき、実際には統計的推定値を工学的判断によって情報不足を補う場合が多い。しかし、従来の統計手法では標本データの観測値と工学的判断等の情報を結び付けることはできない。このような客観的な標本データと定性的な判断等の情報を統合できる概念として、2.3 および 3.3 節に紹介したベイズの方法が提案されており<sup>10),11)</sup>、構造信頼性評価や試験法の構築に応用されている。

費用効果の高い構造運用の管理要求策が必要とされている現状では、信頼性試験によって構造寿命や強度を実証評価することは、構造運用を安全に、そして健全に遂行するためにも重要な課題である。しかし、信頼性工学の手法に基づいてもすべて定量的な評価ができるとは限らない。大型構造物のように少量生産品であれば参照できる関連情報は一般には少なく、仮に類以構造物

表 8 信頼性評価で扱う情報源<sup>25)</sup>

Category	Prior service	In-service
I	Statistical	Statistical
II	Vague	Statistical
III	Statistical	Vague
IV	Vague	Vague

設計や運用の情報が得られたとしても、対象構造の信頼性評価に適用するためには、得られる情報に対する何らかの工夫が必要となる。この少量情報の取扱いの問題に対しては、過去の経験や工学者の判断等を信頼性評価に適切に導入することができ、また新たに得られた情報を逐次利用できる、ベイズ信頼性解析法が有効な手段となる。

構造信頼性評価で取扱う情報源をまとめると、一般にこれらは表 8 に示す 4 つのカテゴリに分類される<sup>25)</sup>。前節に示したように、ベイズ法では情報不足を補うために過去の経験や技術的判断等の主観的な予測を最初に導入(Pre service)することが可能であり、さらに運用経験(In service)という情報のフィードバックを行い、運用前の予測を客観的な情報を用いて修正して信頼度の再評価を繰返してゆく。この場合の情報源はカテゴリ II に相当し、通常のベイズ解析ではこの情報源を扱う。しかし、運用中の検査情報は常に統計処理の可能な客観的な情報であるとは限らず、一般には定量評価が困難な場合を伴う。不確実性は確率的なばらつきや変動の客観性(偶然性)とモデル化や知識不足等に代表される主観性(認識性)の 2 種類に分けられる。カテゴリ III および IV で表されるこのような情報源に対しては、ベイズ理論を拡張したファジィ・ベイズの方法が有効であることが判明している<sup>26)</sup>。すべての情報を取り扱うためには、これらの情報の生起確率を定義しなければならないが、主観的事象生起の確率表現に対しては、ファジィ集合の記述である帰属度関数(membership function: msf)を用いてこれらの事象の尤度を表現できる。このように、カテゴリ I から IV までの情報を導入可能にした方法が、拡張ベイズ理論である。ここで、寿命試験の結果が諸事情によって明確な値が得られず、“N サイクル程度であった”という情報  $E_N$  である場合、これを  $msf \mu(N)$  で定量化することによって、この事象確率を次式で表現できる。

$$L(E_N) = \int_N \mu(N) \Pr[E_N] dN \tag{55}$$

これを曖昧事象の生起確率としてベイズ理論に導入することで、すべての情報を有効に適切に取り扱うことが可能になる。

以下では、カテゴリ II の疲労情報源に対するベイズ法の適用について、ベイズ・ワイブル法ならびに計算統計に基づく階層ベイズ法を各々適用した、寿命に含まれる複雑で広範囲な不確定性要因の構成とそれらを定量評価することが可能な解析手法を記し、2 つの応用例<sup>27)</sup>についてまとめる。

### 5.1 Fuzzy-Bayes-Weibull 信頼性解析(FBW)

構造物の疲労寿命評価において、対象標本が少数の限られた情報環境を想定する。また少量情報であるがゆえに類似構造のデータを参照しなければならない状況もある。このように標本が十分ではなく、関連情報には各種の不確実性が否めない環境の中で疲労寿命をどのように評価すれば良いか、以下ではベイズ・ワイブル法<sup>27)</sup>にファジィ数を応用した、ファジィ化ベイズ・ワイブル(Fuzzified Bayesian Weibull: FBW) 法について検討する。

上述の情報入手が限られている状況では、情報不足を補うために対象構造に類似の情報を適切に導入することが重要である。試験環境、負荷条件、製作過程等の間には類似情報との定量的関係を定めることが難しく、工学的判断を強いられる場合もあり得る。このような定性的な不確定

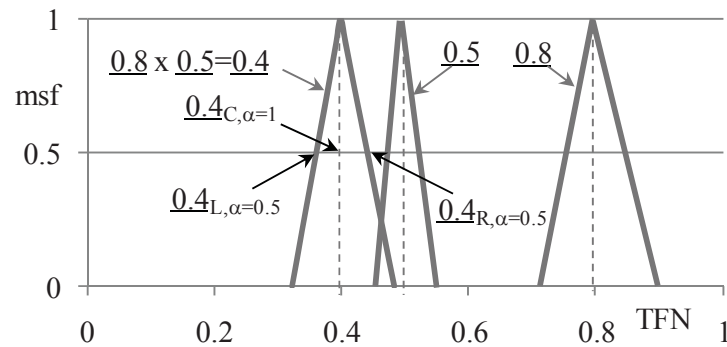


図11 TFN積算近似例とLR値(0.8x0.5=0.4の例)

性を定量化して、寿命評価へ積極的に取り入れることが可能なFBW法の概要を示す。

2.1節に記したように、得られた  $n$  個の疲労試験結果  $\mathbf{N}=\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$  に2母数ワイブル分布  $W(N|\alpha, \beta)$  ((1)式)の適合性が認められたと仮定する。形状母数  $\alpha$  の変動もあるが、ここでは簡単化のために  $\alpha$  を既知として、尺度母数  $\beta$  の推定について  $\lambda=1/\beta^\alpha$  の変数変換を行う。さらに新変数を  $u=\sum N_i^\alpha$  として、 $\lambda$  の推定にベイズ解析を適用する。2.3節の(23)式に示したように、 $\lambda$  の事前分布  $f^{(0)}(\lambda)$  に対して(56)式に示すジェフリーの定義の非報知事前分布<sup>10)</sup>を用いると、 $\lambda$  の事後分布  $f^{(1)}(\lambda)$  が自由度  $n$  のガンマ分布として(57)式で得られる。

$$f^{(0)}(\lambda) \propto 1/\lambda \quad (56)$$

$$f^{(1)}(\lambda) = \lambda^{n-1} u^n \exp(-\lambda u) / \Gamma(n) \quad (57)$$

(57)式の計算ではモンテカルロ法(Monte Carlo: MC)法を適用する。すなわち、0~1の値をとる一様乱数を基に事後分布  $f^{(1)}(\lambda)$  のパーセント点から求めた  $\lambda^*$  を  $\alpha, \beta^*$  で表現し、寿命  $N$  のワイブル分布  $W(N|\alpha, \beta^*)$  を得る。

認識性などの定性的な要因を寿命評価へ反映させるために、3角形ファジイ数(Triangular Fuzzy Number: TFN<sup>29)</sup>:  $\varphi, 0 \leq \varphi \leq 1$ )を用いた重み係数で不確定性要因をモデル化する。具体的には(58)式で示すように、得られた寿命値  $N_i$  に対して  $n_F$  種のファジイ係数  $\varphi_{ij}$ , ( $i=1 \sim n, j=1 \sim n_F$ ) を

$$N_i^* = \prod_{j=1}^{n_F} \varphi_{i,j} \cdot N_i = g_i \cdot N_i, \quad g_i = \prod_{j=1}^{n_F} \varphi_{i,j} \quad (58)$$

設定し、これらを  $N_i$  に乗じて、 $N_i^* < N_i$  となるように元のデータ  $N_i$  よりも安全側の寿命を得る。また標本数  $n$  についても、(59)式のように  $n$  の代わりに  $g_i$  の総和である、 $n^* = \sum \prod \varphi_{ij} = \sum g_i$  を

$$n^* = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n_F} \varphi_{i,j} = \sum_{i=1}^n g_i \quad (59)$$

用いて、 $n^* < n$  とした情報量減少の形で不確定性を表現する。得られた  $N_i^*$  および  $n^*$  はファジイ数であり、 $n_F$  が小さな範囲では図11に示すようにTFNで近似可能である(補記4)。なお、 $N_i^*$ ,  $n^*$  については、msfのレベル値を表す  $\alpha$ -cut 値を用いて評価を行う。

以上のように本手法では、認識上の不確定性が標本数の減少  $n^* < n$  として表わされ、また各寿命値も  $N_i^* < N_i$  と保守側に設定される。少量かつ不確定性の高い状況下での寿命評価では、主観性を表現できる重み係数を安全側に導入したFBW法は有用な手段となる。



表 9 FBW モデル評価例データ

data: i	life: N <sub>i</sub>	φ <sub>i1</sub>	φ <sub>i2</sub>	data: i	life: N <sub>i</sub>	φ <sub>i1</sub>	φ <sub>i2</sub>
1	0.82	1.0	1.0	6	0.48	0.8	0.8
2	1.11	0.9	0.9	7	0.96	0.8	0.8
3	0.68	0.9	0.8	8	1.14	0.8	0.7
4	0.74	0.9	0.8	9	0.99	0.7	0.7
5	1.15	0.9	0.7	10	0.96	0.7	0.6

表 10 FBW 法に基づく安全寿命 N<sub>R,1-γ</sub>

Calculation method	n* <sub>α</sub>	N <sub>R,1-γ</sub>	Sf
N <sub>i</sub> * <sub>α=0.5,L</sub> , n* <sub>α=0.5,L</sub> (L)	6.12	0.29	3.32
N <sub>i</sub> * <sub>α=1.0,C</sub> , n* <sub>α=1.0,C</sub> (C)	6.63	0.31	3.11
N <sub>i</sub> * <sub>α=0.5,R</sub> , n* <sub>α=0.5,R</sub> (R)	7.22	0.32	3.01
95%(1-γ), 95%R	n=10	0.43	2.35
Theoretical 95%R	-	0.48	2.10

5.1.1 FBW 法による評価

既に 2.1 節に記したが、信頼度 R を得るための設計安全寿命 N<sub>R</sub> の計算例をあらためて以下に示す。母数(α, β)を既知とした 2 母数ワイブル分布に対する安全寿命の解析値 N<sub>R</sub>は(60)式になる。

$$N_R = \beta \{ \ln(1/R) \}^{1/\alpha} \tag{60}$$

また疲労試験結果から得た特性寿命(β: 最尤推定値)を用いると、2.1 節のおよび(5)、(6)式から信頼性水準 1-γ、信頼度 R における安全寿命 N<sub>R,1-γ</sub>が (61)式で表される。

$$N_{R,1-\gamma} = \beta \{ \ln(1/R) \}^{1/\alpha} \left\{ \frac{1}{2n} \chi_{1-\gamma}^2(2n) \right\}^{-1/\alpha} \tag{61}$$

以下の数値例では 1-γ=0.95、R=0.95 とする。なお、標本統計に基づく(61)式の N<sub>R,1-γ</sub>の評価では当然のことながら定性的要因を含むことはできない。

2 項分布の確率から MIL-B 値を満たす最低標本数が 29 であることを考慮すると<sup>10)</sup>、材料構造分野における少量標本数とはこれを大きく下回る場合であろう。そこで、標本数を n=10 として、各標本に定性的要因が 2 種類(n<sub>F</sub>=2)ほど含まれる場合を想定する。ここでは W(N|α=4,β=1)を仮定して標本値 N={N<sub>1</sub>,N<sub>2</sub>,...,N<sub>n</sub>}を数値シミュレーションで得る。なお N を無次元化する。また想定した TFN: φ<sub>ij</sub> を、標本 N と共に表 9 に示す。各 TFN の LR 値を φ<sub>ij</sub>±0.1\*φ<sub>ij</sub> と置く(図 11)。

表 9 の値と(58)、(59)式から TFN である N<sub>i</sub>\*、n\*を得る。またこれら TFN の帰属度の α-cut の L,R 値を N<sub>i</sub>\*<sub>α L or R</sub>, n\*<sub>α L or R</sub> と記す(図 11)。これらの値を用いて、上述した FBW 法に従って母数推定を行い、寿命分布 W(N|α,β<sub>1-γ</sub>)を得る。N<sub>R=0.95,1-γ=0.95</sub>はこの分布の 95%点として求められる。これらの値を表 10 にまとめる。図 12 は α-cut=0.5L の計算例を示す。

表 10 において、2.1 節 (11)式の N<sub>R</sub> の真実値は N<sub>R</sub>=0.48、また標本 N のみから従来の 95%信頼水準/95%信頼度における N<sub>R,1-γ</sub>を求めると N<sub>R,1-γ</sub>=0.43 となる。これに対して、N<sub>i</sub>\*<sub>α</sub>, n\*<sub>α</sub>の値を用いた、L,R(α-cut=0.5), C(α-cut=1.0)の各条件における N<sub>R,1-γ</sub>を n\*<sub>α</sub>と共に表10に示す。最も保守側の N<sub>R</sub>は α-cut= 0.5L の場合であり、標本数減少と安全を見込む係数φ<sub>ij</sub>が N<sub>R</sub>を小さく設定して

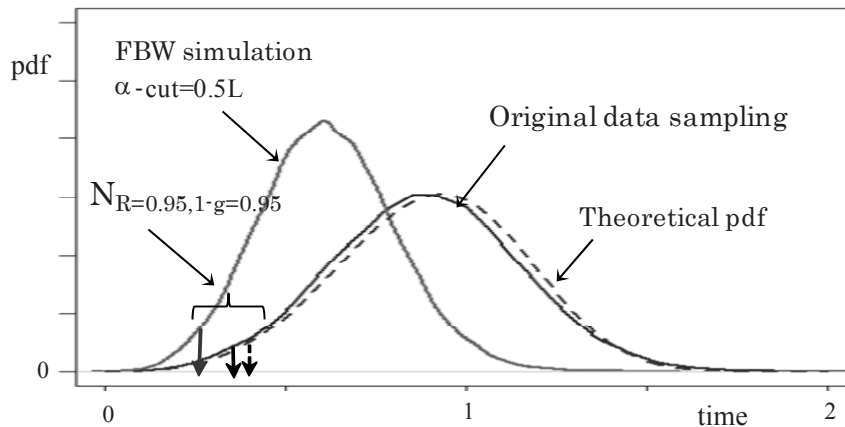


図 12 FBW 法による  $N_{R,1-\gamma}$  計算例

いる。L,C,R の 3 種の FBW に対する  $N_R$  はいずれも従来の方法の  $N_R$  に比べて小さく、FBW 法は不確定性の大きい標本環境下では有効な評価指標を与える。

疲労寿命安全率  $S_f$  は、2.1 節の(11)式で示したように標本の特性値（ここでは最尤推定値： $\beta$ ）を安全寿命で除した係数である。表9の標本例の特性値は $\beta=0.964$ となるので、FBW 法で得られた安全寿命  $N_{R,1-\gamma}$  で $\beta$ を割ることによって、疲労寿命安全率  $S_f$  が得られる。これらの結果を表 10 の最右列に示す。標本変量に関連する不確定性の増減に対応した指標  $S_f$  が得られる。

## 5.2 階層ベイズ法に基づく信頼性評価(HB)

情報不足を補うために、類似のデータを活用するという、幅広い情報源に基づく疲労寿命評価が考えられる。しかし情報源固有の特性もあるので、それらの個性に比例して確率モデルが複雑になり、多くの未知母数を用いた評価モデルが必要となる。これに対しては、類似情報を適切に導入できる階層ベイズ (Hierarchical Bayes: HB) 法が有効である<sup>30)</sup>。HB 法では扱うべき多くの未知母数を尤度に含めて記述する。さらに各々の未知母数についての事前分布を構成し、これらを尤度に乘じて多段階にベイズ推定を行って母数の事後分布を求める。そして得られた事後分布を基に目的の信頼性評価を行う。一般に事後分布は複雑であるために、事後分布を求める計算手法としては MCMC(Markov chain Monte Carlo)法<sup>31),32)</sup>が用いられる (補記 5)。

### 5.2.1 モデルの構成

ワイブル分布に対する HB モデルは幾つかの提案がなされているが<sup>30)</sup>、ここでは寿命の尺度を示す母数  $\lambda=1/\beta^\alpha$ 、ならびに $\lambda$ の確率分布を構成する超母数の推定において、事後分布が既知形となる HB 法を用いる。前節と同様に $\lambda$ を用いると、ワイブル寿命分布は(62)式に示される。

$$w(N|\alpha, \lambda) = \alpha \lambda N^{\alpha-1} \exp(-\lambda N^\alpha) \quad (62)$$

ここで $\lambda$ に対して、各標本毎に変化する固有の確率変数 $\lambda_i (i=1 \sim n)$ とする HB を構成する。最初に $\lambda_i$ の事前分布に対して、各 $\lambda_i$ に共通する超母数( $u, v$ )を用いた(63)式のガンマ分布を仮定する。

$$g^{(0)}(\lambda_i | u, v) = \frac{1}{v^u \Gamma(u)} \lambda_i^{u-1} \exp\left(-\frac{\lambda_i}{v}\right) \quad (63)$$

さらに(63)式において  $u$  を定数に置き、超母数  $v$  に対する事前分布として(64)式の逆ガンマ分布を考える。ただし、 $a, b$  を定数とする。

$$h^{(0)}(v | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{v}\right)^{a+1} \exp\left(-\frac{b}{v}\right) \quad (64)$$



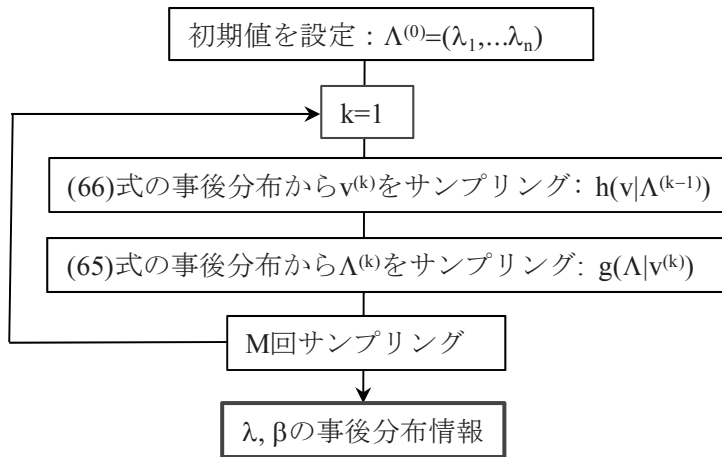


図13 ギブス・サンプリングによる事後分布計算

### 5.2.2 ギブス・サンプリングによる事後分布の計算

$\lambda_i \perp \lambda_j (i \neq j)$  の前提条件から、寿命標本値  $\mathbf{N}=\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$  を基に、各  $\lambda_i$  の事後分布が(65)式のガンマ分布形に得られる。また  $v$  の事後分布は、(64)式の事前分布と情報  $\mathbf{\Lambda}=(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  を用いると(66)式の逆ガンマ分布形で得られる<sup>30)</sup>。

$$g^{(1)}(\lambda_i | T, u) = \frac{f(t_i | \alpha, \lambda_i) g^{(0)}(\lambda_i | u, v)}{\int (Numerators) d\lambda_i} = \frac{(t_i^\alpha + \frac{1}{v})^{u+1}}{\Gamma(u+1)} \lambda_i^u \exp\{-\lambda_i(t_i^\alpha + \frac{1}{v})\} \quad (65)$$

$$h^{(1)}(v | \mathbf{\Lambda}) = \frac{L(u, v | \mathbf{\Lambda}) h^{(0)}(v | a, b)}{\int (Numerators) dv} = (\sum_{i=1}^n \lambda_i + b)^{nu+a} \frac{1}{\Gamma(nu+a)} (\frac{1}{v})^{nu+a+1} \exp\{-\frac{1}{v}(\sum_{i=1}^n \lambda_i + b)\} \quad (66)$$

(65)および(66)式は既知の分布形であるため、MCMCのギブス・サンプリング法<sup>30)</sup>を適用して事後分布を計算する。

### 5.2.3 HBを用いた解析

尺度母数  $\mathbf{\Lambda}$  (または  $\mathbf{\beta}$ ) と  $\mathbf{\Lambda}$  を構成する確率分布の超パラメタ  $v$  を HB に基づき推定する。未知母数  $\lambda$  および  $v$  の事後分布について、標本数  $n=10$  として以下に計算例を記す。(65)式の  $g(\mathbf{\Lambda} | u, v)$  の超パラメタを  $u=2$  と固定し、さらに(66)式の  $h(v | a, b)$  の超パラメタを  $a=1, b=1$  に仮定する。また、条件付確率を適用するギブス・サンプリングの計算過程の概略を図13に示す。この方法に従い、初期値  $\mathbf{\Lambda}$  の設定後に  $h(v | \mathbf{\Lambda})$  から  $v$  を求めて、これを条件としてさらに  $g(\mathbf{\Lambda} | v)$  から  $\mathbf{\Lambda}$  を得る。この2段階のベイズ推定において、サンプリングを繰り返すことによって目的の  $\mathbf{\Lambda}$  (または  $\mathbf{\beta}$ ) の事後分布  $f(\mathbf{\beta})$  を得る。ここで、 $\mathbf{\beta}=\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  であり、各標本毎に尺度母数が対応する評価モデルを考慮している。尺度母数ベクトル  $\mathbf{\beta}=\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  の真実値(unknown)のモデルとして、ここではその揺らぎを正規分布  $\mathbf{\beta}(\text{true})=N[1, 0.05^2]$  で仮定する。各標本  $i$  に対して各々に対応する尺度母数  $\beta_{\text{true},i}$  をシミュレートして、これを基に寿命の標本値  $N_{\text{sample},i}$  を作成して寿命データとする。すなわち、標本毎の固有の特性を、このような尺度母数のばらつきで表現する。

サンプリング回数を  $N_s=20,000$  と設定し、上述した HB 法で求めた  $\mathbf{\beta}$  の事後分布  $f(\mathbf{\beta})$  の一例として、10番目の  $\beta_{i=10}$  に対する  $f(\beta_{i=10})$  を図14に示す。本図から信頼水準95%の  $\beta_{i=10, 1-\gamma}=0.95$  が求め

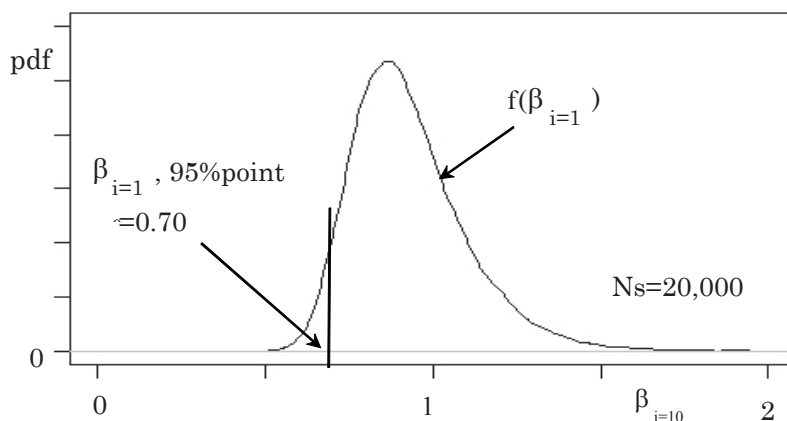
図 14 事後分布  $f(\beta_{i=10})$  と  $\beta_{i=10,1-\gamma=0.95}$ 

表 11 HBモデルによる安全寿命評価

sample: i	$\beta_{i,true}$	$N_{i,sample}$	$\beta_{i,1-\gamma}$	$N_{R,1-\gamma}$	Sf
1	0.94	0.83	0.73	0.35	2.89
2	1.01	0.97	0.78	0.37	2.73
3	0.98	1.28	0.90	0.43	2.35
4	0.96	0.69	0.71	0.34	2.97
5	1.02	1.20	0.87	0.41	2.47
6	0.95	0.82	0.73	0.35	2.89
7	0.96	1.05	0.81	0.38	2.66
8	1.08	1.02	0.80	0.38	2.66
9	1.04	1.04	0.80	0.38	2.66
10	0.91	0.67	0.70	0.33	3.06
$N_{R=0.95,1-\gamma=0.95} (n=10)$				0.43	2.35

られるので、これを尺度母数とするワイブル分布  $W(N|\alpha=4, \beta_{i=10,1-\gamma=0.95})$  から、95%安全寿命  $N_{R,1-\gamma}$  が得られる。表 11 に標本毎の  $\beta_{i,true,i}$ 、 $N_{sample,i}$ 、 $\beta_{i,1-\gamma=0.95}$ 、 $N_{R,1-\gamma}$  を各々示す。

以上から、各標本の個性を反映させたHBの構成モデルによって、未知母数ベクトル  $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  が推定され、FBW法における(61)式と同様に、HBによる各標本*i*に対する  $N_{R,1-\gamma}$  を求めることができる。なお、 $\beta$  を標本  $N_i (i=1 \sim n)$  から求めた最尤推定値とすると  $\beta$  となり、これから  $N_{R,1-\gamma}$  は 0.43 となる。これに対して本例の各標本毎の特性（予め仮定した揺らぎ）が、 $N_{R,1-\gamma}$  の変動として表されている。

先にも示したように、疲労寿命安全率 Sf は標本特性値を安全寿命で除した係数である。HB法における Sf の評価では、標本特性値の定義として、すべての標本 ( $n=10$ ) からの最尤推定値  $\beta$  を用いる。すなわち、得られた標本毎の評価を行う前に、予め標本全体の特性値として把握しておく。次に HB 法で得られた安全寿命  $N_{R,1-\gamma}$  で  $\beta$  を割ることによって、各標本の個性に対応した疲労寿命安全率 Sf が得られる。以上の結果を表 11 の最右列に示す。

### 5.3 フリート信頼性に関する補足

2.1 および 2.2 節においてはフリート・サイズ  $M$  を評価要因として加えた信頼性について記したが、従来から、フリート信頼性はフリートを構成する個々の機体構造の直列系の信頼度として定義される。すなわち、フリート・サイズ  $M$  の中の最小疲労寿命値で評価される。フリート運

用における保守や検査計画に影響を与えるフリートの信頼度の定義では、そのサイズ  $M$  の大きさに係わらずフリート全体としての損害を同一であるべきとする考え方が基本にある<sup>10)</sup>。ただし、フリート中の機体運用は全て同一の運用条件下にあることが前提である。フリートの信頼性では飛行回数（時間）によって機体構造の疲労寿命を記述し、これを基本として信頼性を評価している。しかしフリート中では若年運用の機体もあれば、経年構造に入る機体もあろう。また寿命の積算も運用プロファイル（運用経験）に依存して、飛行荷重に大きな影響を受けることは明らかである。個々の機体の受けた荷重履歴が得られていれば、詳細な疲労寿命を算出してあらためてフリート信頼性評価へ反映できるが、情報取得の面から現実的にはこれは困難である。このように、運航や整備環境などの運用形態の諸要因に依存して個々の機体の評価尺度は異なるので、より適切なフリート信頼性を得るためには、各機体構造固有の運用状況をフリートに反映させた評価が必要である。

これについてはフリートの運用を確率過程として捉えて、この状態空間を逐次推定する信頼性評価モデルの構築が考えられる。個々の機体運用は同一ではないもののほぼ類似である、あるいは運用の差異に関しては従来の運用経験から簡単な確率モデル化ができる、などの工学的判断の導入が可能であれば、フリート信頼性評価に HB の応用が考えられる。すなわち、寿命の主要因である構造運用履歴が各機体ごとに異なることから、フリート運用状況を状態空間として捉えて未知母数の階層構造を表現し、逐次得られる個々の機体運用実績を導入したフリート信頼性評価が構築可能である。このような実情に即したフリート信頼性評価では、確率過程に基づくフィルター・モデルと階層ベイズ法 HB が有効な手段となろう。

## 6. まとめ

航空機は大型構造物であるがゆえに、信頼性評価に用いるデータとして質、量ともに様々な制約を受ける場合が多い。本ノートでは疲労寿命安全率に対するいくつかの評価法を記したが、特にベイズの方法は、情報量が少ない状況であっても試験結果を有効に活用して、いくつかの工夫によって適切な推定量を得ることが可能となる。疲労および関連する要因の多くは確率量であり、安全かつ経済的な構造運用を行うためには、最初に信頼性工学という共通の基盤の上に立つことが重要である。

## 謝 辞

本ノートでは、従来の確率統計学における頻度解析では扱うことができない問題の解決方法として主にベイズ理論を応用した展開を示したが、この分野の先駆者である板垣 浩元横浜国立大学学長ならびに朝田洋雄元航空宇宙技術研究所総合研究官からは数々のご指導をいただいた。また両氏の疲労寿命安全率に関する研究成果および資料についてもご教示をいただき、ここではその一部を含めて紹介した。ここに記して深く感謝の意を表します。

なおこれらの考え方に基いた信頼性解析評価ツールの構築に際しては、最近の計算統計学の発展によってマルコフ連鎖モンテカルロ・シミュレーション(MCMC)が極めて有効な評価手法であり、さらに作図機能や探索的データ解析が可能である世界的な確率統計フリーソフト”R”<sup>33)</sup>の適用が効果的であることを付記する。

## 参考文献

- 1), 2) FAA, "Damage Tolerance and fatigue evaluation of structure", FAR.25.571,1993, AC25.571-1B,1993, AC-25-571-IC,1998.
- 3) Swift ,T., "Verification of method for damage tolerance evaluation, 12<sup>th</sup> Sympo. , ICAF, 1983.

- 4) 藤原源吉、“材料強度の確率モデル(60)”、機械の研究、Vol.53,No.8,p.884,2001.
- 5) 朝田洋雄、“構造安全性に対する信頼性解析の役割”、航空技術、NO.442,p.17,1992.
- 6) Whittaker,I.C., et, “A reliability analysis approach to fatigue life variability of aircraft structures,AFML-TR-69-65,1969.
- 7) 石川 浩、“実働荷重下における機械・構造物疲労寿命の信頼性解析”、材料、日本材料学会、Vol.24,No.259-266,1975.
- 8) Mann,N.R.”Point and interval estimation procedures for the two-parameters Weibull and extreme-value distributions, Technometrics,Vol.10,p.231,1968.
- 9) Freudenthal,A.M., “The scatter factor in reliability assessment of aircraft structures”, J.aircraft, Vol.14, No.2, p.202,1977.
- 10) 岡村弘之、板垣 浩、“強度の統計的取り扱い”、培風館、1979.
- 11) 板垣 浩、“疲れ設計とスキャッターファクターについて”、第1回設計における信頼性工学シンポジウム “、日本材料学会、1977.
- 12) Yu Chee Tong,”Literature Review on Aircraft Structural Risk and Reliability Analysis”, AMRL, DSTO-TR-1110, 2001.
- 13) 上山忠夫、“構造信頼性”、日科技連、1984.
- 14) 上山忠夫、“航空機構造の疲れ寿命評価”、日本航空宇宙学会誌、Vol.9,No.88,p.141,1961.
- 15) Atkinson,R.J., “Aircraft/Fatigue, 1959.
- 16) Kamiyama, T.,”Scatter factor for fatigue life of civil aircraft structure”,Reliability approach in structural engineering,maruxenn Co.,p.1975.
- 17) Butler,J.P.,”Reliability analysis in the estimation of transport-type aircraft fatigue performance, the Boeing Co.,1969.
- 18) ICAO, “Fatigue strength of aeroplane structures “,ICAO CIRCULAR C1-AN/56, 1961.
- 19) 上山忠夫、竹内和之、朝田洋雄、“部材疲れ試験結果による輸送機疲労寿命安全率の再評価”、第16回構造強度に関する講演会、1974.
- 20) Benoy,M.B.,”Fatigue Life Variability in Civil Aircraft”,11<sup>th</sup> Sympo.,ICAF,1981.
- 21) Gumbel,E.J.,”Statistics of extremes”, Columbia University Press, 1958.
- 22) 朝田洋雄、“航空機構造の疲れ破壊に対する安全性の研究”、東京大学学位論文、1980.
- 23) 朝田洋雄、“ベイズの定理を用いた3母数ワイブル分布の母数推定”、第28回応用力学連合講演会、p.241, 1978.
- 24) 酒井達雄、田中道七、“3母数ワイブル分布の母数推定について”、材料、日本材料学会、Vol.29,No.316, p.17,1979.
- 25) Colin,B.B. and Yao,J.T.P.,”Fuzzy set and structural engineering”,Structural Engineering, Vol.109,No.5,p.1211,1983.
- 26) 伊藤誠一、板垣 浩：“構造信頼性評価に対するファジィ情報の導入 “、航空宇宙技術研究所報告、TR-1063,1990.
- 27) 伊藤誠一、杉本 直、岡田孝雄、“ベイズ法に基づく不確定性の大きい疲労寿命の評価について”、第53回構造強度に関する講演会、2011.
- 28) Martz,H.F. and Waller ,R.A., “Bayesian Reliability Analysis”, Krieger Publishing Co., Malabar,FL,1991.
- 29) 田中英夫、松岡 浩 訳、“ファジィ数学モデル”、オーム社、1992.
- 30) 貝瀬 徹、“計算統計学に基づく信頼性データの解析”、REAJ 誌、Vol.31,N0.8,2009.
- 31) 伊庭幸人、他、“計算統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺”、統計化学のフロンティア 12、岩波書店、2005.
- 32) 伊庭幸人、“ベイズ統計と統計物理”、岩波講座物理の世界、岩波書店、2003.
- 33) 舟尾暢男、“The R Tips 第2版”、オーム社、2009.

補記 1 正規分布における片側許容値を与える係数kと標本数nの関係

信頼水準 $\gamma=0.95, 0.99$ 、信頼度  $R=(1-P)=0.9, 0.99$ 、の各々の4条件に対して、次の2項目、

- (1) 平均値未知( $\mu$ )
- (2) 平均値および標準偏差未知( $\mu, \sigma$ )

に対する片側許容値を与える係数  $k$  と必要標本数  $n$  を求めてグラフ表示する。プログラムと計算結果を、フリーソフト”R”を用いて示す。上記項目(1),(2)の評価式を、各々(A1)、(A2)式に記す。

$$k = \Phi^{-1}(1 - P) + \Phi^{-1}(1 - \gamma) / \sqrt{n} \tag{A1}$$

$$k = \frac{t^*_{\lambda}(n-1, \sqrt{na_p})}{\sqrt{n}} \tag{A2}$$

ここで、 $\Phi^{-1}()$ は標準正規分布の逆関数、 $t^*_{\lambda}(a,b)$ は自由度  $a$ 、非心度  $b$  の非心  $t$  分布の上側確率 $\lambda$ に対するパーセント点、そして  $a_p=\Phi^{-1}(1-P)$ は標準正規分布の上側確率  $P$  に対するパーセント点を各々示す。なお、MIL 規格 A,B 値は、(A2)式において信頼水準 $\gamma=0.95$ 、信頼度  $R=0.99, 0.9$  に各々対応する。

```
# MIL-HDBK A,B Values (“R”では#印以後はコメントを示す。)
n1<- c(2:50)
n1[50]<- 60
n1[51]<- 80 # 標本数 n をベクトル n1 へ(x 軸) ; n=2,3,...,50,60,80 の 51 データとする。
n11<- n1-1 # n11=n1-1
sn1<- sqrt(n1)
r1<- 0.9
r2<- 0.99 # 信頼度 R=0.9,0.99 を定義
g1<- 0.95
g2<- 0.99 # 信頼水準 $\gamma=0.95,0.99$  を定義
ap1<- qnorm(r1,mean=0,sd=1,lower.tail=TRUE,log.p=FALSE)
ap2<- qnorm(r2,mean=0,sd=1,lower.tail=TRUE,log.p=FALSE)
# 標準正規分布 p%点の計算
d1<- qnorm(r1)+qnorm(g1)/sn1
d2<- qnorm(r2)+qnorm(g1)/sn1
d3<- qnorm(r1)+qnorm(g2)/sn1
d4<- qnorm(r2)+qnorm(g2)/sn1 # (A-1)式を計算
xx<- log10(n1)
y1<- log10(d1)
y2<- log10(d2)
y3<- log10(d3)
y4<- log10(d4) # 対数軸に変換
k5<- qt(g1,n11,sn1*ap1)/sn1
k6<- qt(g1,n11,sn1*ap2)/sn1
k7<- qt(g2,n11,sn1*ap1)/sn1
k8<- qt(g2,n11,sn1*ap2)/sn1 # (A-2)式を計算
y5<- log10(k5)
y6<- log10(k6)
y7<- log10(k7)
y8<- log10(k8) # 対数軸に変換
# 以下グラフ表示化
par(mfrow=c(1,2))
plot(xx,y1,type="l",ylim=c(0,2.0),xlab="log10(n)",ylab="log10(k)",lwd=1.5)
lines(xx,y2,lty=1,lwd=2)
names<- paste("equation (A",c("1",R="0.99","1",R="0.9"))
legend(0.6,2,names,lwd=c(2,1.5), lty=1)
lines(xx,y5,lty=2,lwd=1.5)
```



```

lines(xx,y6,lty=2,lwd=2)
title(sub="confidence=0.95")
names<- paste("equation (A",c("2),R=0.99","2),R=0.9")
legend(0.6,1.6,names,lwd=c(2,1.5), lty=2)
plot(xx,y3,type="l",ylim=c(0,2.0),xlab="log10(n)",ylab="log10(k)",lwd=1.5)
lines(xx,y4,lty=1,lwd=2)
names<- paste("equation (A",c("1),R=0.99","1),R=0.9")
legend(0.6,2,names,lwd=c(2,1.5), lty=1)
lines(xx,y7,lty=2,lwd=1.5)
lines(xx,y8,lty=2,lwd=2)
title(sub="confidence=0.99")
names<- paste("equation (A",c("2),R=0.99","2),R=0.9")
legend(0.6,1.6,names,lwd=c(2,1.5), lty=2)
# 終了

```

本プログラムで得られる結果を以下に図示する。

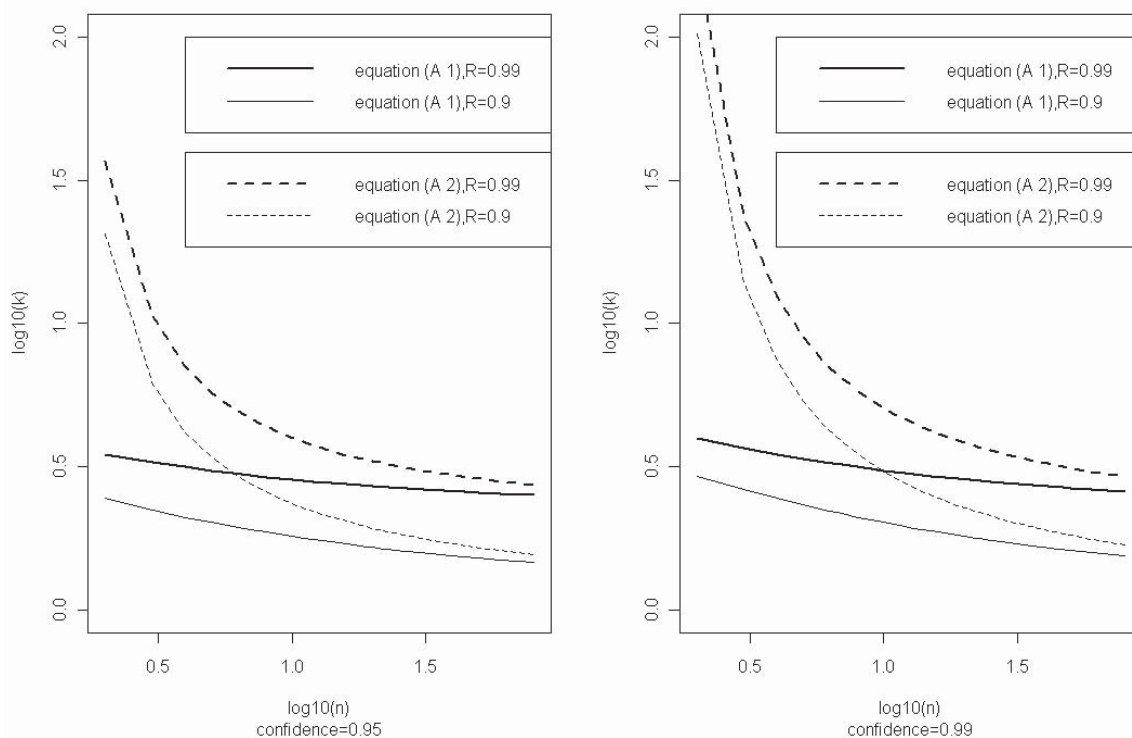


図 A1 片側許容値を与える係数  $k$  と標本数  $n$  の関係

## 補記 2 疲労寿命安全率 $S_f$ 関連諸式と計算例

2 母数ワイブル分布 (本文第 2 章) と対数正規分布 (第 3 章) を疲労寿命分布に仮定した場合の疲労寿命安全率  $S_f$  の計算諸式を、表 A1 にまとめる。また、 $S_f$  の計算例を表 A2 に示す。

表 A1 疲労寿命安全率 Sf 諸式

	2母数ワイブル分布：W(N   α,β)	対数正規分布：N(logN   μ,σ <sup>2</sup> )
試験実績使用	$S_f = \frac{\underline{\beta}}{N_{R,1-\gamma}} = \frac{\left\{ \frac{1}{2n} \chi_{1-\gamma}^2(2n) \right\}^{1/\alpha}}{\{1n(1/R)\}^{1/\alpha}}$ <p style="text-align: right;">本文(11)式</p>	$S_f = \frac{10^{\underline{\mu}}}{10^{x_R}} = 10^{(k_p+k_{1-\gamma}/\sqrt{n})\sigma}$ <p style="text-align: right;">本文(35)式</p>
解析手法	$S_f = \frac{\underline{\beta}}{N_R} = \frac{1}{\{1n(1/R)\}^{1/\alpha}}$ <p style="text-align: right;">本文(9)式</p>	$S_f = \frac{10^{\underline{\mu}}}{10^{x_p}} = 10^{k_p\sigma}$ <p style="text-align: right;">本文(32)式</p>
備考 R : 信頼度 1-γ : 信頼水準 n : 標本数 N <sub>R,1-γ</sub> : 安全寿命	$\underline{\beta} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i^\alpha \right)^{1/\alpha}$ <p style="text-align: right;">標本特性値</p> $\underline{\beta}_{1-\gamma} = \underline{\beta} \left\{ \frac{1}{2n} \chi_{1-\gamma}^2(2n) \right\}^{-1/\alpha}$ $N_{R,1-\gamma} = \underline{\beta}_{1-\gamma} \{1n(1/R)\}^{1/\alpha}$	$\underline{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log N_i$ <p style="text-align: right;">標本特性値</p> $\underline{\mu}_{1-\gamma} = \underline{\mu} - \frac{k_{1-\gamma}}{\sqrt{n}} \sigma$ $x_p = \underline{\mu}_{1-\gamma} - k_p \sigma \quad , \quad N_{R,1-\gamma} = 10^{x_p}$

表 A2 疲労寿命安全率 Sf の計算例

信頼度 : R	試験標本数 : n	2母数ワイブル分布 : W(N   α,β)		対数正規分布 : N[logN   μ,σ <sup>2</sup> ]	
		試験実績	解析	試験実績	解析
0.9	1	2.31	1.76	2.82	1.57
	2	2.18		2.38	
	5	2.04		2.05	
	10	1.96		1.89	
	100	1.83		1.67	
0.95	1	2.76	2.10	3.21	1.79
	2	2.61		2.71	
	5	2.44		2.33	
	10	2.35		2.15	
	100	2.19		1.90	
0.99	1	4.16	3.16	4.09	2.38
	2	3.92		3.45	
	5	3.67		2.96	
	10	3.54		2.74	
	100	3.28		2.42	

(信頼水準 1-γ=0.95、形状母数 α=4、標準偏差 σ=0.154 における計算例)



## 補記3 第4章(53)式の導出

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6} \ln 10 \cdot \sigma} \quad (53)$$

疲労寿命分布を2母数ワイブル分布:  $W(t|\alpha, \beta)$  と置くと、寿命  $t$  の常用対数  $\log(t)$  の標準偏差:  $\sigma$  と2母数ワイブル分布の形状母数:  $\alpha$  との関係が以下のように導かれる。2母数ワイブル分布:  $W(t|\alpha, \beta)$  の確率密度関数(pdf):  $w(t|\alpha, \beta)$  は次式に示される。

$$w(t|\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} (t/\beta)^{\alpha-1} \exp\{-(t/\beta)^\alpha\} \quad (A3)$$

$t$  の自然対数  $u = \ln t$  をとり、その pdf:  $g(u)$  を求める。

$$g(u) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \exp(\alpha u) \exp\{-\exp(\alpha u)/\beta^\alpha\} \quad (A4)$$

これから  $u$  の期待値  $\mu(u)$  を以下のように得る。

$$\begin{aligned} \mu(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} u g(u) du = \frac{1}{\alpha \beta^\alpha} \int_0^{\infty} \ln v \exp\{-v/\beta^\alpha\} dv \quad (v = \exp(\alpha u), 0 \leq v < \infty) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} (\ln z - \ln c) \exp(-z) dz \quad (z = cv, 0 \leq z < \infty, c = 1/\beta^\alpha) \end{aligned} \quad (A5)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} z^{x-1} \exp(-z) dz \\ \frac{d\Gamma(x)}{dx} &= \int_0^{\infty} z^{x-1} \ln z \exp(-z) dz \\ \psi(x) &= \frac{d\{\ln\Gamma(x)\}}{dx} = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx} = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}} \right\} dz \\ \frac{d\Gamma(x)}{dx} \Big|_{x=1} &= \int_0^{\infty} \ln z \exp(-z) dz = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} \right\} dz = -\gamma \quad \gamma: Euler's const. \end{aligned} \right\} \quad (A6)$$

したがって、(A5)および(A6)式を参照して、 $u = \ln t$  の期待値が以下に求められる。

$$\mu(u) = \frac{1}{\alpha} (-\gamma + \ln \beta^\alpha) \quad (A7)$$

つづいて  $u = \ln t$  の2乗モーメントは次式になる。

$$\begin{aligned} E[u^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u) du = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} (\ln z - \ln c)^2 \exp(-z) dz \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} (\ln z)^2 \exp(-z) dz - \frac{2 \ln c}{\alpha^2} \int_0^{\infty} \ln z \exp(-z) dz + \frac{(\ln c)^2}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (A8)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi(x)}{dx} &= \frac{d^2\{\ln\Gamma(x)\}}{dx^2} = -\frac{1}{\Gamma^2(x)} \left( \frac{d\Gamma(x)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d^2\Gamma(x)}{dx^2} = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{ze^{-xz}}{1-e^{-z}} \right\} dz \\ \frac{d^2\Gamma(x)}{dx^2} &= \int_0^{\infty} z^{x-1} (\ln z)^2 \exp(-z) dz \\ \frac{d^2\Gamma(x)}{dx^2} \Big|_{x=1} &= \int_0^{\infty} (\ln z)^2 \exp(-z) dz \end{aligned} \right\} \quad (A9)$$

上記3式から、

$$\frac{d\psi(x)}{dx} \Big|_{x=1} = -\gamma^2 + \frac{d^2\Gamma(x)}{dx^2} = \int_0^\infty \left\{ \frac{z}{e^z - 1} \right\} dz = \frac{\pi^2}{6} \tag{A10}$$

したがって(A8)式は、

$$\begin{aligned} E[u^2] &= \int_{-\infty}^\infty u^2 f(u) du \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left( \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) - \frac{2\gamma \ln \beta}{\alpha} + (\ln \beta)^2 \end{aligned} \tag{A11}$$

(A5)および(A11)式から、 $u = \ln t$  の分散  $V[u]$  は次式になる。

$$\begin{aligned} V[u] &= \int_{-\infty}^\infty u^2 f(u) du - \{\mu(u)\}^2 \\ &= \frac{\pi^2}{6\alpha^2} = \sigma^{*2} \end{aligned} \tag{A12}$$

ここで常用対数で示した寿命の標準偏差 $\sigma$ と上記の自然対数表示の寿命の標準偏差 $\sigma^*$ の関係は、

$$\sigma^* = \sigma \ln 10 \tag{A13}$$

で示される。以上から、(A12)および(A13)式から本文(53)式が得られる。

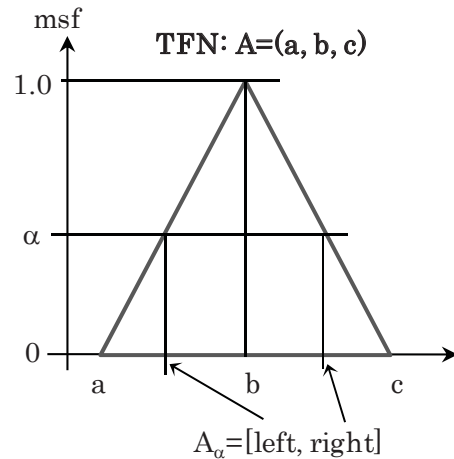
$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6 \ln 10} \cdot \sigma}$$

補記 4 3角形ファジイ数(Triangular Fuzzy Number: TFN)の近似計算

TFN の線形演算の結果は TFN で表現できるが、非線形演算においてもその結果を TFN で近似することによって実際の応用計算では便利な場合が多い。そこで2つの TFN の積算を例として、実際の積値と TFN 近似値との差を求める。

図 A2 に示すように、TFN は帰属度関数(membership function:msf)の $\alpha$ レベルを表す $\alpha$ -cut:  $\alpha \in [0, 1]$  を用いると、三角形左右の辺の $\alpha$ -cut レベル[left,right]が次式で定義される。

$$A_\alpha = [\text{left}, \text{right}] = [a + (b - a)\alpha, c - (c - b)\alpha] \tag{A14}$$



図A2 3角形ファジイ数と $\alpha$ -cut

2つの TFN、 $A1=(a1,b1,c1)$ と  $A2=(a2,b2,c2)$ の積の $\alpha$ -cut 値は次式で計算される。

$$\begin{aligned} A1_\alpha \cdot A2_\alpha &= [a_1 + (b_1 - a_1)\alpha, c_1 - (c_1 - b_1)\alpha] \cdot [a_2 + (b_2 - a_2)\alpha, c_2 - (c_2 - b_2)\alpha] \\ &= [a_1 a_2 + (a_1(b_2 - a_2) + a_2(b_1 - a_1))\alpha + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\alpha^2, \\ &\quad c_1 c_2 - (c_1(c_2 - b_2) + c_2(c_1 - b_1))\alpha + (c_1 - b_1)(c_2 - b_2)\alpha^2] \end{aligned} \tag{A15}$$

これから帰属度 $\alpha=0$ 、 $\alpha=1$  の上記積の $\alpha$ -cut 値が以下に示される。

$$(A1_\alpha \cdot A2_\alpha)_{\alpha=0} = [a_1 a_2, c_1 c_2], \quad (A1_\alpha \cdot A2_\alpha)_{\alpha=1} = [b_1 b_2, b_1 b_2] = b_1 b_2 \quad (A16)$$

ここで、TFN、A1 と A2 の積を TFN :B=(a<sub>1</sub>a<sub>2</sub>,b<sub>1</sub>b<sub>2</sub>,c<sub>1</sub>c<sub>2</sub>)を用いて近似すると、B の $\alpha$ -cut 値は次式で得られる。

$$B_\alpha = [a_1 a_2 + (b_1 b_2 - a_1 a_2)\alpha, c_1 c_2 - (c_1 c_2 - b_1 b_2)\alpha] \quad (A17)$$

(A15)式および(A17)式から、正式な積の $\alpha$ -cut レベルと近似 TFN:B の $\alpha$ -cut レベルの差を TFN の left 側で計算すると、次式の $\alpha$ のみに依存する差 $dL_\alpha$ が得られる<sup>29)</sup>。

$$dL_\alpha = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(\alpha^2 - \alpha) \quad (A18)$$

上記 left 側の差の最大値 $dL_{\max}$ は $\alpha=0.5$ の時の値となり、次式になる。

$$dL_{\max} = -0.25(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \quad (A19)$$

同様に、right 側における差も $\alpha=0.5$ の時に次式の最大値 $dR_{\max}$ となる。

$$dR_{\max} = -0.25(c_1 - b_1)(c_2 - b_2) \quad (A20)$$

本文 5.1 節の TFN 積算例、 $0.8 \times 0.5 = 0.4$  の例では、 $0.8 = (0.72, 0.8, 0.88)$ 、 $0.5 = (0.45, 0.5, 0.55)$  であるので、これを上記(A19)および(A20)式に代入すると、近似 TFN を用いた計算では、その差異が $dL_{\max} = dR_{\max} = 0.001$  と計算される。

## 補記 5 MCMC(Markov chain Monte Carlo)計算の方法

本文(20)式や第 5 章に記したベイズ解析では、未知母数の事後分布に関連する多重積分の計算を要する。ここで  $r$  次元空間での点  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_r\}$  の確率分布を  $P(\mathbf{X})$  とすると、この種の積分は一般に次式の期待値として表される。

$$E[F(\mathbf{X})] = \int_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}) P(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (A21)$$

モンテカルロ法(Monte Carlo)の基本は、この確率分布  $P(\mathbf{X})$  に比例した点列をサンプルして (A21) 式の積分を分布関数の点列の和に置き換えることにある。N 個の点列を  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$  とすると、上記の期待値は次式になる。

$$E[F(\mathbf{X})] \cong \int_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) d\mathbf{X} = \frac{1}{N} \{F(\mathbf{X}_1), \dots, F(\mathbf{X}_N)\} \quad (A22)$$

計算統計学の発展によって、目的の分布  $P(\mathbf{X})$  を効率良く疑似できる方法として、現在では確率過程のマルコフ連鎖を用いたサンプル手法が確立されている。マルコフ連鎖(Markov chain)  $\{\mathbf{X}_i\}$  は現在の点  $\mathbf{X}_i$  は直前の点  $\mathbf{X}_{i-1}$  にのみ依存する確率分布に従うので、この性質を利用して(A21)式や(A22)式の計算を効率よく収束させることが可能である<sup>31)</sup>。

ここでマルコフ連鎖  $\{\mathbf{X}_i\}$  であるための条件として、点  $\mathbf{X}_i$  から点  $\mathbf{X}_{i-1}$  への遷移確率  $T(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_{i-1})$  を定義すると、 $T$  は  $0 \leq T(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_{i-1}) \leq 1$ 、 $\int T d\mathbf{X} = 1$  を満たさなければならない。これによって確率過程が時間によらずに一定である定常分布の存在が保証される。この定常分布が目的の確率分

布関数  $P(\mathbf{X})$  になるようにマルコフ連鎖を構成してサンプル  $\{\mathbf{X}_i\}$  を得る手法がマルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC)である。ここで、定常分布が目的の確率分布  $P(\mathbf{X})$  になるための2つの必要条件を以下に示す<sup>31),32)</sup>。

(1) 詳細つり合い条件

遷移確率は次の条件式を満たす。この条件では、ある点  $\mathbf{X}_i$  は確率分布  $P(\mathbf{X})$  の生起しやすい点域  $\mathbf{X}_{i+1}$  に移動し、生起しにくい点域には遷移確率  $T$  を小さくして移動しにくくする役目を持つ。

$$P(\mathbf{X}_i)T(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_{i+1}) = P(\mathbf{X}_{i+1})T(\mathbf{X}_{i+1} \rightarrow \mathbf{X}_i) \quad (\text{A23})$$

(2) エルゴード性

任意の2つの点  $\mathbf{X}_i$  と  $\mathbf{X}_{i+1}$  は有限の遷移確率で連結している。すなわち、2つの状態間を有限回で必ず辿り着く性質である。