連続モデルと離散モデルの適合性から見た信頼性の議論

相曽 秀昭
宇宙航空研究開発機構 総合技術研究本部

Consistency between Continuous and Discrete Models and Reliability.

by
Hideaki AISO

ABSTRACT

Numerical computation of differential equations usually needs some discretization of the original equation. The discretization is called discrete (or discretized) model, while the original differential equation is called continuous model. The properties of both models are expected to be of exact coincidence, but there is always some inconsistency between them. In such a situation, we need to know the inconsistency in order to understand what a result of numerical computation means. Otherwise we might misunderstand it to regard a specific behavior of numerical solution coming from the property of discrete model but not from that of continuous one as a part of behavior of the original equation's solution.

Here we show some trial to analyze the numerical instability that occurs in numerical calculation of shock waves, where ocurs a typical example of inconsistency between the continuous and discrete models.

1. はじめに

流体等を対象とする数値シミュレーションにおいては、現象を一旦微分方程式により記述し更にその微分方程式を離散式により近似して数値計算用アルゴリズムを得るのが通例である。[1] 即ち、実際の現象を支配する機構が微分方程式の様な連続モデルによって数理的に記述され、更にその連続モデルから再度離散式による近似である離散モデルを得る。現実世界の現象の数理的記述である連続モデルの妥当性は物理や化学等の現象論的方法論と数理的方法論の双方を用いて議論されるが、連続モデルから離散モデルを得る過程は異なるカテゴリーに属する数理モデル間の書き換えである故にその妥当性は数理的方法論の枠内で議論される。

数理モデルの妥当性と一言で云う場合、その妥当性の議論は連続モデルに対して為され、離散モデルは連続モデルを近似する付属物程度に考えられることも多い。しかし上述の状況から、離散モデルと連続モデルを対等に比較して両モデルの性質や挙動が妥当な形で相互に対応するか否かについて議論する事も重要である。当然の事ながら連続モデルの性質及び挙動の全てが離散モデルに反映されることが期待されるが、両モデルが異なるカテゴリーに属するモデルである以上はそのような包括的かつ全般的な要請が完全に満足される事は困難である。そこで、連続モデルの重要な性質や挙動[2] が離散モデルに妥当な形で継承され、数値シミュレーション結果に具現化されることが期待される。この個々の性質や挙動に関する継承 (又は、連続モデルと離散モデルの間での当該の性質や挙動の対応) を適合性 (consistency) という。

離散モデルによる数値解の連続モデルの厳密解への収束や打切誤差項の解析に基づく精度の議論は離散モデルの評価の指標として従来から広く用いられ、特に適合性という概念が意識される事は殆ど無いがこれらも適合性の議論の例である。実際、連続モデルの厳密解への収束は離散化に対する最低限の要求で、収束について反例が生じる離散モデルは通常利用されない。収束が数学的に未証明の離散モデルも暗黙のうちに収束を期待して使用されている。本論での議論の対象となる Godunov 法をはじめとする圧縮性 Euler 方程式の差分近似法の殆どがこの部類に属する。

[1] 現象の数理的記述として直接に離散式が得られる場合も考え得るが、そのような例は例外的であろう。

[2] 同一の連続モデルであっても重要とされる性質や挙動は数値シミュレーションの目的により異なることもある。

しかし、数値計算の実際においては理論的な収束証明において0や無限大に極限移行する量を十分に小さい(もしくは十分に大きい)量としてしか実現できない事から次のような問題を生ずる。理論的には計算格子が無限に細かくなる中で1個又は有限個の格子点に特異的な値が存在しても、関数空間を適当に選択すればそれらの特異的数値現象は理論的には収束を妨げない。また、数値的振動が生じてもその範囲が格子点数で見て有限の範囲であれば状況は同様である。しかし、現実の数値計算ではこれらの特異的数値現象を極限移行によって消去することはできず、それらは現実の数値計算結果に残存してしまう。ここでは圧縮性Euler方程式で考えているが、反応項等で複雑化した方程式の場合にはそのような特異的数値現象の影響がより大域的になり数値計算結果の信頼性への影響が考えられる。

ここでは以下に示すような圧縮性 Euler 方程式の Godunov 法他による数値計算における特異的数値現象とそれを議論するための適合性の視点を考察する。いずれも数値解の厳密解への収束(現在未証明だが、それが証明されたとしても)に矛盾するものではなく、収束以外の両モデルの適合性の議論の必要性を示すものである。これらの特異的数値現象の発生機構はは未だによく解明されておらず、ここではそれらに対する数学的な解析の現状と課題を考察する。

2. 圧縮性 Euler 方程式の離散モデルにおける衝撃波周辺の不安定

圧縮性Euler方程式における衝撃波を保存型差分近似により数値計算すると衝撃波面に沿って数値的な不安定が生じることは良く知られる。この不安定は1次元計算では観察されず多次元計算の際に発生し[3]、数値的カーバンクル(Carbuncle)の名で知られる。学術的考察の対象としての認識は[4]が初めてであるが、それ以前にも実際の計算現場では衝撃波周辺で生じる数値的不安定は認知されていたと思われる。しかし、 Lax-Wendroff 法等で発生する数値振動(これらは1次元計算であっても発生する)と混同された等の理由で、独立した数理的考察の対象として認識されるまでに時間を要したようである。

ここでは、数値的カーバンクルを現象論的に「ある差分スキームを固定して圧縮性 Euler 方程式の衝撃波を含む解を数値計算した場合、 1 次元計算では発生しないが多次元計算において発生する数値的不安定」と定義する。この現象が発生し易い差分法として Roe 差分が良く知られているが、これを Roe 差分特有の現象と解釈することは適当でなく、現に Godunov 法等他の差分法でも発生する事が確認されている。([1, 2, 3] 等)

数値的カーバンクルについて以下のような事が経験的に知られている。

- (C1) 衝撃波面の法線がどれかの格子座標軸にほぼ平行な場合に発生し易い。
- (C2) 衝撃波が強いほど発生しやすい。
- (C3) 不安定が観察され始めてしばらくの間(不安定がそれ程に大きくない間)、不安定の成長は時間に対し指数関数的である。
- (C4) 時間刻みを小さくしても不安定を抑制できない。
- (C5) 数値粘性の付加が不安定の抑制に有効である。特に衝撃波面に平行する座標軸方向に数値粘性を付加することが効果的である。

よく知られる数値的カーバンクルの例としては、直交格子での平面衝撃波(衝撃波面の法線が格子座標軸のどれか)、超音速流内の鈍頭物体による衝撃波(衝撃波に沿うような格子をとる)が挙げられる。

3. 2 次元圧縮性 Euler 方程式における平面衝撃波

ここでは考察の対象として、 2 次元の圧縮性 Euler 方程式

$$U_t+F(U)_x+G(U)_y=0, -\infty<x,y<\infty, t>0 \quad (1)$$

の直交格子による保存型差分近似

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n} &- \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{n} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j}^{n}\right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}\right\} \end{aligned} \quad (2)$$

を考える。(2) でUは保存変数のベクトル

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad (3)$$

[3]Lax-Wendroff 法や中心差分法を用いれば 1 次元計算においても数値的振動が生じるが、ここでは衝撃波捕獲の為に用いられる、少なくとも 1 次元計算においては実質的に安定な衝撃波捕獲が可能な差分法(Godunov 法、 Roe 法など)を用いた場合であっても多次元計算になると顕著な数値的不安定が観察されることを意味している。

(ただし、ρ, u, v, p, eはそれぞれ、密度、x-、y-各方向の速度成分、圧力、単位体積あたり全エネルギー) であり、x-、y-各方向の流束F, Gは

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

である。また、内部エネルギーと圧力の関係を定める何らかの状態方程式が必要で、例えば理想気体の状態方程式

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2). \qquad (5)$$

を仮定する。差分近似(2)において$U^n_{i,j}$は時刻$n\Delta t$での直交格子に基づく各有限体積$I_{i,j} = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ におけるUの近似であり、$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j}$,$\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}}$ はそれぞれ隣接体積$I_{i,j}$と$I_{i+1,j}$または$I_{i,j}$と$I_{i,j+1}$の間での数値流束である。

離散時間発展(2)においては

$$\begin{gathered} \cdots = U^n_{i,j-1} = U^n_{i,j} = U^n_{i,j+1} = \cdots \\ \text{ならば} \\ \cdots = U^{n+1}_{i,j-1} = U^{n+1}_{i,j} = U^{n+1}_{i,j+1} = \cdots \end{gathered} \qquad (6)$$

であるから、$U^0_{i,j} = U^0_i$である 1 次元的な初期データ$\{U^0_{i,j}\}$からの離散時間発展(2)の厳密解$\{U^n_{i,j}\}$は、jには依存しない。つまり、$\{U^n_i\}$を初期値$\{U^0_i\}$から空間 1 次元での離散時間発展

$$U^{n+1}_i = U^n_i - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}^n_{i-\frac{1}{2}}\right\} \qquad (7)$$

を逐次進めて得られるデータとすれば、

$$U^n_{i,j} = U^n_i \qquad (8)$$

である。ところが計算機上では桁落ち等の為に(6)が厳密には成立せず[4]、各$U^n_{i,j}$に離散的時間発展(2)の厳密解からの逸脱(誤差)$\Delta U^n_{i,j}$ が加わり

$$U^n_{i,j} = U^n_i + \Delta U^n_{i,j} \qquad (9)$$

となる。一旦生じた厳密解からの誤差は離散時間発展(2)の機構に包含されて発展する[5] が、それが数値的カーバンクルの主因と推測される。[6]

[4]仮に、Δyを計算機上で整数形の1としてしまうと桁落ち誤差はjに依存せずに数値計算でも(6)が実現でき数値的カーバンクルは生じない。しかし、これは特殊な例である。

[5]毎回の離散時間発展の計算で新たに桁落ち誤差等による計算誤差が生じるがそれ以前に生じた誤差は(2)の計算に包含されてしまうので、

$$\begin{aligned} (n+1\text{段での誤差}) &= (n\text{段での誤差が(2)で伝わった分}) \\ &\quad +(\text{桁落ち等により新たに生じた誤差}) \end{aligned}$$

となる。

[6]離散的時間発展を逐次行えば、それによる桁落ち誤差等の蓄積もあり誤差は増加すると考えられる。しかしそのような誤差の蓄積だけでは数値的な不安定性は生じない。

4. 線形安定性解析からのアプローチ

離散的時間発展(2)が線形安定でない事から誤差の増幅を説明しようとする試みは通常の線形化では成功していない。実際、定係数線形保存則の差分近似については 1 次元で安定であれば多次元に拡張しても適当な CFL 条件を満たしている限り安定である。数値的カーバンクルは離散時間発展の時間刻みを小さくしても除去できない事実からこのアプローチが有効でない事が理解される。

そこで、衝撃波という状況を取り入れて線形安定性を観察する為、離散時間発展を$\{U^n_{i,j}\}_{i,j} \longrightarrow \{U^{n+1}_{i,j}\}_{i,j}$のような写像と見なしてその写像の線形化を考察する方法がある。この方法論に基づいた試みは数値計算やそれによる検証の手法の援用を得てある程度の成功を収めている。

実際、写像$\{U^n_{i,j}\}_{i,j} \longrightarrow \{U^{n+1}_{i,j}\}_{i,j}$ の線形化を表す行列のサイズは

(格子点数の 4 倍) × (格子点数の 4 倍)

であり、その固有値を調べるためには数値計算の援用が有効である。また、写像の線形化の偏導関数値の計算についても、一般的な差分近似では理論式の導出は容易ではなく数値微分の利用が有効である。[6] ではこのような考察が行われ、異なるいくつかの差分近似法による静止衝撃波の数値計算例について、圧縮性 Euler 方程式の数値計算の試行による安定性の観察と線形安定性(線形化行列の固有値分布) を求める数値計算とが行われている。示された計算例では線形安定性の喪失と数値的カーバンクルの発生の一致が観察されている。

また、[1, 3] ではGodunov 法差分では離散的時間発展(2) における偏導関数$\partial U^{n+1}_{i,j}/\partial U^{n+1}_{i,j}$, $\partial U^{n+1}_{i,j}/\partial U^{n+1}_{i\pm1,j}$, $\partial U^{n+1}_{i,j}/\partial U^{n+1}_{i,j\pm1}$, の理論的記述を導出し、$\{U^n_{i,j}\}_{i,j} \longrightarrow \{U^{n+1}_{i,j}\}_{i,j}$ の線形化から得られる式

$$\begin{aligned} \Delta U^{n+1}_{i,j} &= \left(\frac{\partial U^{n+1}_{i,j}}{\partial U^{n+1}_{i,j}}\right)\Delta U^n_{i,j} \\ &+ \left(\frac{\partial U^{n+1}_{i,j}}{\partial U^{n+1}_{i-1,j}}\right)\Delta U^n_{i-1,j} + \left(\frac{\partial U^{n+1}_{i,j}}{\partial U^{n+1}_{i+1,j}}\right)\Delta U^n_{i+1,j} \\ &+ \left(\frac{\partial U^{n+1}_{i,j}}{\partial U^{n+1}_{i,j-1}}\right)\Delta U^n_{i,j-1} + \left(\frac{\partial U^{n+1}_{i,j}}{\partial U^{n+1}_{i,j+1}}\right)\Delta U^n_{i,j+1} \end{aligned} \qquad (10)$$

が数値的カーバンクルの発生と初期成長においては現実の誤差の時間発展をよく近似する事実を観

察している。なお、$\Delta U^*_{*,*}$についてはは$U^0_{i,j} = U^0_i$である 2 次元計算用の初期値$\{U^0_{i,j}\}$と 1 次元計算用の初期値$\{U^0_i\}$からそれぞれ(2)、(7) による離散時間発展の数値計算を逐次行って得られたデータ$U^n_{i,j}$、U^n_iを用いて$\Delta U^n_{i,j} = U^n_{i,j} - U^n_i$として計算している。

5. 進行衝撃波での数値検証

[6] や [1, 3] により数値的カーバンクルの発生と離散モデルにおける時間発展の線形安定性の関連が示されるが、数値的カーバンクルには非線形性に由来する等の他の原因も有り得よう。桁落ち等による誤差から数値的カーバンクルが発生する機構や初期の微小な不安定が増幅される機構に関しては専ら線形安定性が支配することが [1, 3, 6] からは予測される。

しかし、線形安定性と不安定発生の関係を詳細に調べる場合、[6] の方法では数値微分の計算精度についての問題を解決するのは容易ではない。また、[1, 3] についても不安定の発生を前提として式 (10) の近似的成立を確認するものであるので線形安定性と実際の数値不安定の詳細な因果関係を調べるのには向かない。

そこで、[2] において Godunov 法差分では離散的時間発展 (2) における偏導関数$\partial U^{n+1}_{i,j}/\partial U^{n+1}_{i,j}$, $\partial U^{n+1}_{i,j}/\partial U^{n+1}_{i\pm1,j}$, $\partial U^{n+1}_{i,j}/\partial U^{n+1}_{i,j\pm1}$, を理論式で記述でき、特に$i$方向に完全上流性がある場合には式が簡潔な事及び数値的カーバンクルの誤差 (式 (9) で定める$\Delta U^n_{i,j}$) についての偶奇性 (odd-even property)

$$\Delta U^n_{i,j} = (-1)^j \Delta U^n_i \qquad (11)$$

の仮定[7]の導入により線形安定性の考察を空間 1 次元問題と同等の単純な問題に帰着できる事を利用し、線形安定性の喪失と数値不安定の発生について詳細な数値検証を次の様に試みた。

1. $\Delta x, \Delta t$ を適当に固定する。
2. 先ず、模擬すべき 1 次元的進行衝撃波として
   (1) 衝撃波進行速度sが$\Delta x/\Delta t$の正かつ 1 未満の有理数倍である。即ち、
   $$s = p/q (p, q は互いに素な自然数)$$
   (2) 衝撃波の両側において、全ての特性速度が十分に 0 より大きい。

   を満たすものをとる。
3. 2 で定めた進行衝撃波を 1 次元数値計算した場合の安定な離散衝撃波プロファイルを数値計算によって得る。ここで「安定な離散衝撃波プロファイル」とは、(数値的にではあるが)$U^{n+p}_{i+q} = U^n_i$ が成立しているデータをいう。数値計算領域の大きさによる影響を排除する為、十分に大きな領域で計算を実行する。
4. 3 で得られた 1 次元プロファイル (データ) を元に次の 2 つの数値計算を行う。
   (1) 離散時間発展の線形安定性
   偶奇性の仮定 (11) により、誤差$\{\Delta U^n_i\}_i$の (2) による離散時間発展を線形化して考察する。実際には、$\{\Delta U^n_i\}_i \longrightarrow \{\Delta U^{n+1}_i\}_i$の線形化の行列$M^{i+1}_i$の安定性を個々に調べずに、行列$M^{i+p}_i = M^{i+p}_{i+p-1} \times \cdots \times M^{i+1}_i$を求め、その固有値の実部の絶対値の最大を数値計算して線形安定性を評価する。
   (2) 離散時間発展の実際の数値計算
   誤差が偶奇性の仮定を満たす様に離散時間発展 (2) の数値計算を行う。j方向の格子数を 2 としてj方向の境界では循環境界条件を用いる事で誤差の偶奇性を実現する。また、jに依存する数値計算上の微小な誤差の発生が必要なので、(イ) 数値計算誤等がjに依存するようにΔyの値をとる、又は、(ロ) 数値計算誤差がjに依存しない場合には計算の初期で適当な大きさで偶奇性を満たす微小誤差を加える、の方法を採用する。なお、(イ)、(ロ) の両方法では数値実験における数値的カーバンクルの発生･非発生が一致する。
5. 4 の 2 種類の数値実験を元に線形不安定性の喪失と数値的カーバンクルの発生が一致するか否かを検討する。

これらの数値計算の結果からは、多くの計算例においてかなりの精度で (2 倍精度実数を用いた計算では固有値実数部の絶対値の最大について有効桁数 10 桁程度で) 線形安定性の喪失と数値的カー

[7]近似的成立は多くの例で経験的に観察されるので、この仮定により議論が大きく特殊になることはないと考えられる。

バンクルの発生が一致する事が観察される。一致しない例は観察されない(発見されていない)。

そこで、完全上流性を有する進行衝撃波計算では線形安定性の喪失と数値的カーバンクルの発生の一致を主張してよいと考える。

6. 静止衝撃波の場合における問題点

5と同様の数値検証を静止衝撃波に拡張する試みについて述べる。静止衝撃波の場合も、原理的には前述の5の場合と同様に数値検証が可能であるが、$\partial U_{i,j}^{n+1}/\partial U_{i,j}^{n+1}$ 等の偏微分係数を求めるアルゴリズムが少々複雑になる (理論的に厳密な記述ではあるが) ため、数値検証も少々複雑になる。

実際に数値計算を実行すると5の場合と異なり、線形安定性の喪失と数値的カーバンクルの発生は概ね一致するものの厳密な一致とは言えない状況がしばしば観察される。その原因として次のようなものが考えられる。

(1) 静止衝撃波の離散プロファイルは Godunov 法差分の場合には内点[8] が 1 点のみであり、内点が多数 (理論的には無限個) である進行衝撃波に比べ静止衝撃波の離散プロファイルは特異的であると考えられる。即ち、1 点しかない内点やその隣の点で発生した誤差のその後増幅 (減衰) を離散時間発展を元の (誤差のない) 離散プロファイルにおいて線形化したモデルで判断することの妥当性を考察する必要がある。

(2) (1) にも関連するが、Godunov 法差分の 1 次元離散衝撃波プロファイルでは (多次元ではない)1 次元離散モデルの場合の線形不安定性が知られている。([5, 7] 等参照) ある衝撃波に対応する特性曲線場では衝撃波両側の特性曲線が衝撃波の位置で衝突·消滅する事に対応し、1 次元離散モデルの数値計算では衝撃波付近で発生した不安定が周辺へ大きくは伝播し難い。そのために 1 次元離散モデルにおいては線形不安定と実際の数値計算の不安定が対応しない。また、1 次元の線形安定性と多次元の線形安定性も同一ではない。これらの相互作用についての考察が必要であると考えられる。

(3) $\partial U_{i,j}^{n+1}/\partial U_{i,j}^{n+1}$等の偏微分係数を求めるアルゴリズムの複雑さによる数値計算での誤差の発生。

上記問題点の考察のため、(3) についてはほぼ条件が同等であると考えられる完全上流性を有しない進行衝撃波についての数値実験も試みると (1) の要素が強く影響していると予想される。しかし進行衝撃波で完全上流性を有する場合と有しない場合を比較すれば (3) の要素の影響も予想され、広く一般の場合について数値検証を行って何らかの結論を得るためには数値検証の方法論について更に検討が必要であると思われる。

7. 不安定抑制法と数値検証

経験的に、数値的カーバンクルは適当な数値粘性を付加することにより抑制可能であることが知られ現実の計算で不安定の発生が生じ易い場合にはこの抑制法が一般的に利用されている。また、[1] では差分近似の保存性を若干失う[9] ものの、数値粘性の付加という観点では一般的な抑制法に比べはるかに解の劣化の度合いが小さい。5の数値検証法を用いると、これらの抑制法により離散時間発展における線形安定性が実現できそれに伴って数値カーバンクルの発生が抑制されることが確認できる。

現在では一般的に行われる適当な数値粘性の付加により現実の数値計算におけるカーバンクル不安定の回避は十分に可能であるが、限界的な数値計算において適合性を確保しつつ数値粘性による解の劣化を防ぐ為にはより有効で副作用 (解の品質低下) の小さい抑制法の開発の必要がある。このような目的にも5の様な数値検証は有益であろうと思われる。

また、数値粘性を付加する場合に衝撃波を平行する方向の数値粘性が他の方向の数値粘性に比べ有効であることが経験的に知られる ([6] の中でも検証されている) が、5の方法で数値検証を行うと

(1) 衝撃波に平行する方向に数値粘性を付加すると、衝撃波の捕獲精度は殆ど悪化せずに線形安定性が実現される。

(2) それ以外の方法に数値粘性を付加すると衝撃波の捕獲が鈍化し、その結果として線形安定性が実現される。

[8] 衝撃波の両側の状態とは違う中間状態を取る計算点。衝撃波片側の状態からもう一方の側の状態への数値的な遷移の為に保存型差分においては通常 1 点以上必要。厳密解の衝撃波の位置が数値計算の格子における有限体積の境界と一致している場合には内点が存在しない数値解も実現し得るが、それ以外の場合は内点の存在は必須である。

[9] 形式的に非保存項が生じるが、現実の計算においては保存の喪失は微小である。

という事が観察でき、数値粘性を付加する方向により数値カーバンクル抑制の機構が異なることも明確に理解される。

8. 今後の課題

今後の課題としては次のような事が考えられる。

(1) 連続モデルの厳密解についての性質に不明点が未だに多い事がこの数値カーバンクルの議論を困難にするとともに議論の焦点を絞り難い理由となっている。厳密解の一意性が何らかの方法で示されれば、このような数値的問題をより理論的に扱い得る方法論が期待できると思われる。

(2) 数値的カーバンクルが Roe 差分のような少々人工的な計算法の場合だけでなく Riemann 問題の厳密解から導出される理論的には極めて簡潔な Godunov 法でも発生する事から、より一般的・定性的な形で数値的カーバンクルが発生する条件を論じる方向への一般化が期待される。各離散時間発展毎に有限体積内の分布を平均化する過程は有限体積法では不可避であるが、線形的な概念である平均化と問題の持つ非線形性がどのように相互作用するのかについての考察を行う為には現在の議論では特殊に過ぎる感がある。

(3) 圧縮性 Euler 方程式以外に類似の現象が発生するものについては、殆ど考察されていない。MHD の方程式においては類似現象の発生が報告されている [9] が、圧縮性 Euler 方程式よりも単純な方程式で類似現象が発生し得るか否かについては明らかではない。本来、連続モデルと離散モデルの適合性に関する議論は物理現象と関連させずに数学的な方法論で議論するのが理想と考えられる。その為には、類似現象の発生し得る問題についてより知見を得る必要がある。

参考文献

1) M. Abouziarov. On nonlinear stability analysis for finite volume schemes, plane wave instability and carbuncle phenomena explanation. In *Second International Symposium on "Finite Volumes for Comples Applications - Problems and Perspectives -" Duisburg, July 19-22, 1999* , pages 247–252. 1999.

2) H. AISO and M. Abouziarov. Instability Analysis in Conservative Difference Approximations for Compressible Euler Equations -Toward Understanding the Carbuncle Phenomenon- . In *Hyperbolic Problems -Theory, Numerics and Applications- (Proceedings of 10th International Conference in Osaka September 2004)* , pages 231–238. Yokohama Publishers, 2006.

3) H. Aiso, M. Abouziarov and T. Takahashi. Machinery of Numerical Instability in Conservative Difference Approximations for Compressible Euler Equations. . In S. Nishibata, editor, *Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics*, pages 178–191. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2003.

4) J. Quirk. A contribution to the great Riemann solver debate. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18:555–574, 1994.

5) A. Majda and J. Ralston. Discrete Shock Profiles for Systems of Conservation Laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32:445–482, 1979.

6) J.-Ch. Robinet, J. Gressier, G. Casalis, and J.-M. Moschetta. Shock Wave Instability and Carbuncle Phenomenon: same intrinsic origin? *J. Fluid Mechanics*, 417:237–263, 2000.

7) Roe, P.L. Affordable, Entropy-consistent, Flux Functions. *Abstract of Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems, Theory, Numerics, Applications*, July 2006.

8) J. Smoller.*Shock waves and reaction-diffusion equations.* Springer-Verlag, NewYork, 1982.

9) 花輪知幸 三上隼人 松本倫明. 次期流体力学方程式の特性速度を利用した carbuncle 不安定の回避法. 第 20 回流体力学シンポジウム講演要旨集, 261-261. 2006.