

# Hybrid 格子を用いた点緩和型陰的 Discontinuous Galerkin 法の検討

保江 かな子, 澤田 恵介

東北大学大学院 工学研究科

## Study of Pointwise Implicit Discontinuous Galerkin Method for Hybrid Grids

by

Kanako Yasue and Keisuke Sawada (Tohoku Univ.)

### Abstract

A pointwise relaxation implicit Discontinuous Galerkin method developed in our study is extended to unstructured hybrid grids comprised of hexahedral, pyramidal, prismatic and tetrahedral cells. The mathematical formulation of the present method is first shown. The scalar advective equation in 3D space is then solved using hybrid grid. The accuracy of the scheme as well as the convergence rate is examined for illustrating the characteristics of the present numerical method. Finally, the pointwise relaxation implicit DG method for 3D Euler equations is constructed to solve inviscid compressible flowfield over ONERA-M6 isolated wing using hybrid mesh systems.

### 1 はじめに

現在, 数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics) はさまざまな分野で用いられており, 対象となる物体形状や流れ場もより複雑になってきている. 特に航空宇宙分野では, 航空機全機周りに乱流が支配的となる流れ場が対象となっており, 最大揚力係数の見積もりや空力騒音の推定など従来の CFD による解析では, 詳細な解析が困難な現象も多い. そのため, LES (Large Eddy Simulation) や CAA (Computational Aero-Acoustics) など高精度空力解析の研究が多く行われている.

複雑形状周りの空力解析には, 格子生成が容易で形状適合性に優れた非構造格子が多く用いられている. 非構造格子上で高精度を達成する手法としては, k-exact 法 [1] や ENO/WENO 法 [2] を用いた有限体積法が研究されている. しかし, これらの手法では高精度にする際にステンシルを拡大する必要があり, より多くの記憶容量が要求される. また, ステンシルを構成しているセル形状がさまざまであるため, 必ずしも数値解析上での空間精度が定式上の空間精度に達するとは限らない.

そこで近年, 非構造格子上においても高精度を厳密に達成することが可能な計算手法として, Discontinuous Galerkin (DG) 有限要素法 [3] や, Spectral Volume (SV) 有限体積法 [4] が非常に注目されている. これらの手法では, 従来の有限体積法を高次精度化する k-exact 法や, ENO/WENO 法のように周囲にステンシルを広

げるのではなく, セル内部に自由度を与えて物理量の分布を近似することで, 解の再構築を行う. そのため, 小さなステンシルで所期の高次精度を達成することができる. 特に本研究で取り上げる DG 法では, さまざまなセル形状が混在している場合にでも定式上の空間精度を達成することができる.

しかし DG 法や SV 法は一般的に, 計算負荷が非常に高いことで知られている. 例えば, 2次元2次精度の DG 法は, 従来の有限体積法に比べて約10倍, 2次元3次精度では約100倍の計算コストがかかると言われている. DG 法では, セル内の物理量を自由度と基底関数を用いて展開し, 自由度の時間発展を追跡する. そのため, DG 法で解くべき方程式の数は変数の数と各セル内に導入される自由度の数の積で与えられる. また所定の空間精度を得るために, セル境界での流束積分の評価も高次精度化する必要があり, さらなる計算コストの増大に繋がる.

このような問題を解決するために, 高次精度計算手法では, 特に定常解を求めるような流れ場において, 陰解法化による収束加速が求められる. 陰解法構築の際には, より簡便で適用範囲が広く, またベクトル, パラレル化が容易におこなえる手法が必要である. DG 法は, 解の再構築において必要な情報を全てセル内に持つ. そこで, 同様に時間発展に隣のセル情報を用いない点緩和型陰解法が DG 法に適していると考え, これまでに点緩和型陰的 DG 法の構築を行ってきた. 過去の研究

において、テスト計算として四面体格子を用いて3次元 ONERA-M6 翼型周りの圧縮性非粘性解析を行った。マッハ数を0.84, 迎角を3.06[deg], CFL 数を  $10^6$  として計算をおこなった結果, Fig.1 に示すように、非常に大きな CFL 数に対しても安定に収束解を得た [5]。また、本手法を用いて、同様に ONERA-M6 翼型周りの並列計算を行ったところ, Fig.2 にあるように、非常に良い速度向上率を得た [6]。それらの結果から、高い計算負荷が問題となっている DG 法を、本手法を用いることで比較的容易に実用化することができると考えられる。

一方、高 Re 数流れ場においては、薄い境界層を解像度良く捕らえるために壁面付近に格子を寄せる必要がある。しかし四面体のみで構成された格子では壁面付近の格子形状が悪化してしまい、粘性項の計算精度に悪影響を及ぼしてしまう。そこで壁面付近にプリズム格子を配置するハイブリッド格子の利用が一般的である。高次精度計算手法を用いた場合でも、高 Re 数流れ場においてはハイブリッド格子の導入が必要であると考えられる。しかし、これまでに DG 法においてハイブリッド格子を用いた計算例は非常に少ない。

そこで今回は、高レイノルズ数流れ場に対する高次精度点緩和型陰的 Discontinuous Galerkin 法を構築するために、四面体、六面体、プリズム、ピラミッドの4種類の格子形状に対応する点緩和型陰的 DG 法を構築することを目的とする。

これまでに、四面体や六面体以外の格子を用いた DG 法による精度検証は行われていない。そのため、まず3次元線形移流方程式を解いて、さまざまな格子における空間精度の検証を行う。次に、3次元オイラー方程式を解いて、翼型周りの遷音流れ場解析を行い、本手法の安定性や収束特性をハイブリッド格子を用いて検証する。

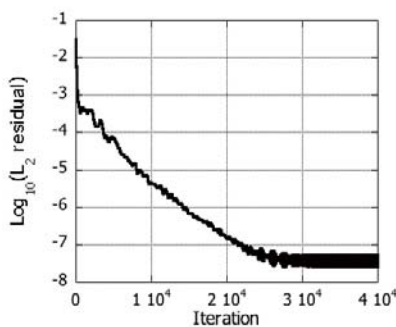


Fig. 1 Convergence history for flowfield over ONERA-M6 isolated wing.

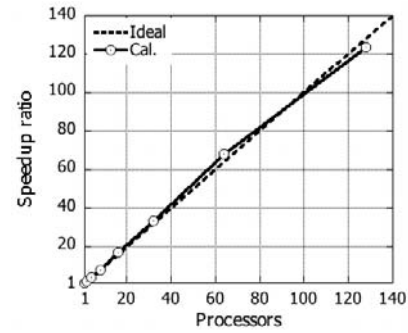


Fig. 2 Speedup ratio of parallel computation for flowfield over ONERA-M6 isolated wing.

## 2 計算手法

### 2.1 Discontinuous Galerkin 法

各セル毎の内部の物理量分布を自由度  $Q_j$  と基底関数  $v_j$  を用いて、

$$Q_h(x, t) = \sum_j Q_j(t)v_j(x) \quad (1)$$

と近似する。添字  $j$  は精度に応じて決まる自由度の数であり、3次元2次精度の場合は4である。

DG 法では、解の再構築をセル毎に独立して行うことが出来る。次式のように支配方程式にセル毎に独立した基底関数  $v_i$  を乗じて、計算セル  $\Omega_e$  で積分した弱形式を解くことで解を得る。

$$\sum_j \frac{dQ_j}{dt} \int_{\Omega_e} v_i v_j d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} v_i F(Q_h) \cdot n d\sigma_e - \int_{\Omega_e} F(Q_h) \cdot \nabla v_i d\Omega_e = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\partial\Omega_e$  は各計算セルの境界を表している。基底関数については、次節で詳細に述べる。

また、式 (2) の左辺第二項の面積分および第三項の体積積分は、空間精度に見合ったガウスの求積法を用いて評価する。

基底関数および自由度はセル毎に独立しているため、DG 法ではセル境界において物理量の不連続を許容している。そこで、セル境界における流束計算には近似リーマン解法を用いる。

### 2.2 座標変換および基底関数

式 (2) の面積分および体積積分を評価する際に、物理座標系  $(x, y, z)$  を基準座標系  $(r, s, t)$  およびテンソル座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  に変換する。基底関数の直交性を保持する為に、各座標系を用いてセルの写像変換を考える [7]。ここでは、基準座標系でのセルを基準セル、テンソル座標

系でのセルをテンソルセルと呼ぶことにする。本計算では、各セルのガウス点と隣接する面のガウス点とを一致させるために、面積分は基準座標空間で行う。また、全セルを统一的に扱うために体積積分はテンソル座標空間で行う。

### 2.2.1 四面体セルの変換および基底関数

四面体セルは、Fig.3 のように2段階で写像変換される。物理座標系における四面体セルと基準四面体セルの変換式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} x = & -\frac{(1+r+s+t)}{2}x_1 + \frac{(1+r)}{2}x_2 \\ & + \frac{(1+s)}{2}x_3 + \frac{(1+t)}{2}x_4 \end{aligned} \quad (3)$$

また、基準四面体セルとテンソルセルの変換式は、

$$\begin{aligned} r = & \frac{(1+\xi)}{2} \frac{(1-\eta)}{2} (1-\zeta) - 1 \\ s = & \frac{(1+\eta)}{2} (1-\zeta) - 1 \\ t = & \zeta \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

四面体から変換されたテンソルセルにおける直交基底関数は、ヤコビ多項式  $P_\gamma^{\alpha,\beta}$  を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned} v_{lmn}(\xi, \eta, \zeta) = & P_l^{0,0}(\xi) \cdot \left(\frac{1-\eta}{2}\right)^l \cdot P_m^{2l+1,0}(\eta) \\ & \cdot \left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^{l+m} \cdot P_n^{2l+2m+2,0}(\zeta) \end{aligned} \quad (5)$$

式(4)を用いると、基準四面体セルに対する直交基底関数  $v(r,s,t)$  が得られる。

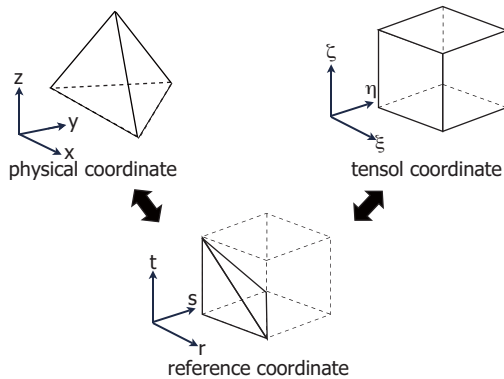


Fig. 3 Schematic illustration of the 3D mapping for tetrahedral cell.

### 2.2.2 六面体セルの写像変換と基底関数

六面体セルは、Fig.4 のように写像変換される。物理座標系における六面体セルとテンソルセルの変換式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} x = & \frac{(1-r)(1-s)(1-t)}{8}x_1 + \frac{(1+r)(1-s)(1-t)}{8}x_2 \\ & + \frac{(1+r)(1+s)(1-t)}{8}x_3 + \frac{(1-r)(1+s)(1-t)}{8}x_4 \\ & + \frac{(1-r)(1-s)(1+t)}{8}x_5 + \frac{(1+r)(1-s)(1+t)}{8}x_6 \\ & + \frac{(1+r)(1+s)(1+t)}{8}x_7 + \frac{(1-r)(1+s)(1+t)}{8}x_8 \end{aligned} \quad (6)$$

六面体から変換されたテンソルセルにおける直交基底関数は、ルジャンドル多項式  $P_\gamma^{0,0}$  を用いて次式のように表される。

$$v_{lmn}(\xi, \eta, \zeta) = P_l^{0,0}(\xi) \cdot P_m^{0,0}(\eta) \cdot P_n^{0,0}(\zeta) \quad (7)$$

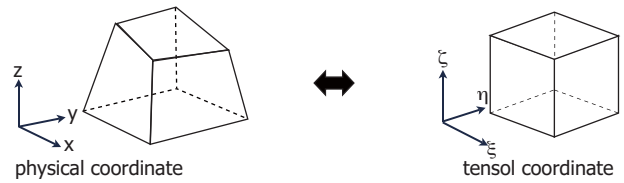


Fig. 4 Schematic illustration of the 3D mapping for hexahedral cell.

### 2.2.3 プリズムセルの変換および基底関数

プリズムセルは、Fig.5 のように2段階で写像変換される。物理座標系におけるプリズムセルと基準プリズムセルの変換式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} x = & -\frac{(r+t)(1-s)}{4}x_1 + \frac{(1+r)(1-s)}{4}x_2 \\ & + \frac{(1+r)(1+s)}{4}x_3 - \frac{(r+t)(1+s)}{4}x_4 \\ & + \frac{(1-s)(1+t)}{4}x_5 + \frac{(1+s)(1+t)}{4}x_6 \end{aligned} \quad (8)$$

また、基準プリズムセルとテンソルセルの変換式は、

$$\begin{aligned} r = & \frac{(1+\xi)}{2} (1-\zeta) - 1 \\ s = & \eta \\ t = & \zeta \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

プリズムセルから変換されたテンソルセルにおける直交基底関数は、ヤコビ多項式  $P_\gamma^{\alpha,\beta}$  を用いて次式のように表される。

$$v_{lmn}(\xi, \eta, \zeta) = P_l^{0,0}(\xi) \cdot P_m^{0,0}(\eta) \cdot (1 - \zeta)^l \cdot P_n^{2l+1,0}(\zeta) \quad (10)$$

式 (9) を用いると、基準プリズムセルに対する直交基底関数  $v(r, s, t)$  が得られる。

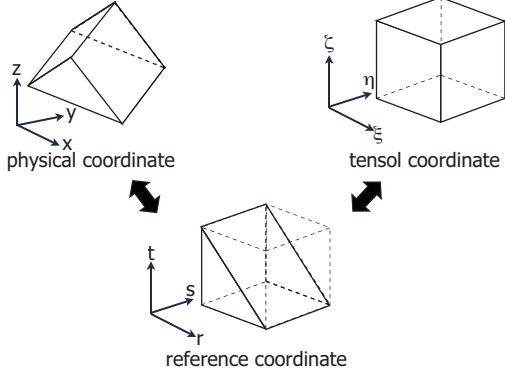


Fig. 5 Schematic illustration of the 3D mapping for prismatic cell.

#### 2.2.4 ピラミッドセルの変換および基底関数

ピラミッドセルは、Fig.6 のように 2 段階で写像変換される。物理座標系におけるピラミッドセルと基準ピラミッドセル間の変換式は以下になる。

$$\begin{aligned} x = & \frac{(r+t)(s+t)}{2(1-t)}x_1 - \frac{(1+r)(s+t)}{2(1-t)}x_2 \\ & + \frac{(1+r)(1+s)}{2(1-t)}x_3 - \frac{(r+t)(1+s)}{2(1-t)}x_4 \\ & + \frac{(1+t)}{2}x_5 \end{aligned} \quad (11)$$

また、基準ピラミッドセルとテンソルセルの間の式は、

$$\begin{aligned} r = & \frac{(1+\xi)}{2}(1-\zeta) - 1 \\ s = & \frac{(1+\eta)}{2}(1-\zeta) - 1 \\ t = & \zeta \end{aligned} \quad (12)$$

となる。

ピラミッドセルから変換されたテンソルセルにおける直交基底関数は、ヤコビ多項式  $P_\gamma^{\alpha,\beta}$  を用いて次式のように表される。

$$v_{lmn}(\xi, \eta, \zeta) = P_l^{0,0}(\xi) \cdot P_m^{0,0}(\eta) \cdot (1 - \zeta)^{l+m} \cdot P_n^{2l+2m+2,0}(\zeta) \quad (13)$$

同様に、式 (12) を用いると、基準四面体セルに対する直交基底関数  $v(r, s, t)$  が得られる。

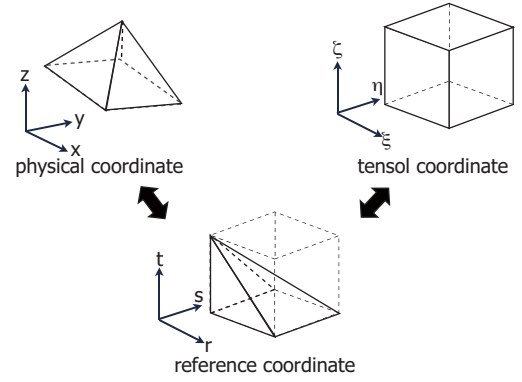


Fig. 6 Schematic illustration of the 3D mapping for pyramidal cell.

#### 2.3 点緩和型陰解法

点緩和型の陰解法はセル内の時間発展のみを考えればよい。そこでまずはじめに、次式で表されるような流束関数の線形化を考える。

$$F^{n+1} \cong F^n + \frac{\partial F}{\partial Q} \Delta Q \quad (14)$$

式 (14) を用いると、式 (2) における左辺第 2 項の面積積分は以下のように近似される。

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_e} v_i F^{n+1} \cdot n d\sigma_e \cong & \int_{\partial\Omega_e} v_i F^n \cdot n d\sigma_e \\ & + \int_{\partial\Omega_e} v_i \left( \frac{\partial F}{\partial Q} \cdot n \right)^+ \Delta Q d\sigma_e \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $D = (\partial F / \partial Q) \cdot n$  とすると、ヤコビ行列の正射影は  $D^+ = \kappa(D + \lambda_{\max} I) / 2$  と定義される。 $\lambda_{\max}$  は流速  $\mathbf{U}$ 、音速  $c$  を用いて、 $\lambda_{\max} = (|\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}| + c)$  で表され、 $\kappa = 1.05$  とする。

同様にして、式 (2) の左辺第 3 項の体積積分は以下のように近似される。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} F^{n+1} \cdot \nabla v_i d\Omega_e \cong & \int_{\Omega_e} F^n \cdot \nabla v_i d\Omega_e \\ & + \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial F}{\partial Q} \cdot \nabla v_i \right) \Delta Q d\Omega_e \end{aligned} \quad (16)$$

式 (15), (16) における、 $\Delta Q$  は

$$\Delta Q = \sum_j \Delta Q_j v_j \quad (17)$$

とかける。また、式 (2) の時間積分項は、

$$\sum_j \frac{dQ_j}{dt} \int_{\Omega_e} v_i v_j d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \sum_j I_{ij} \Delta Q_j \quad (18)$$

となる。ここで、 $I_{ij} = \int_{\Omega} v_i v_j d\Omega$  は基底関数の積のモーメントであり、基底関数が直交性を持つとき、 $I_{ij}$  は対角行列となる。

以上より、最終的に次式で表される  $\Delta Q_j$  に対する代数方程式を得る。

$$\sum_j \mathbf{M}_{ij} \Delta Q_j = \mathbf{R}_i \quad (19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij} = & \frac{1}{\Delta t} \sum_j I_{ij} + \int_{\partial\Omega_e} v_i \left( \frac{\partial F}{\partial Q} \cdot \mathbf{n} \right)^+ v_j d\sigma_e \\ & - \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial F}{\partial Q} \cdot \nabla v_i \right) v_j d\Omega_e \end{aligned} \quad (20)$$

および、

$$\mathbf{R}_i = - \int_{\partial\Omega_e} v_i F^n \cdot \mathbf{n} d\sigma_e + \int_{\Omega_e} F^n \cdot \nabla v_i d\Omega_e \quad (21)$$

である。

### 3 計算結果および考察

#### 3.1 スカラー線形移流問題

構築した点緩和型陰的 DG 法を用いて 3次元線形移流方程式を解き、さまざまな形状の格子に対して、DG 法で達成される空間精度の検証を行った。  $x=0, y=0, z=0$  の 3つの面に波長 1 の正弦波を移流速度 1 で流入させた。セル形状は四面体、六面体、プリズム、ピラミッドの 4種類で検証を行った。Table1 に各格子の計算セル数を示す。

解析解と  $p$  次精度の数値解の誤差を  $\epsilon$ 、計算格子幅を  $\delta x$  とすると  $\epsilon = c(\delta x)^p$  が成り立つ。そのため、誤差  $\epsilon$  と格子幅  $\delta x$  を両対数グラフにプロットすると、その傾きが実際に達成された空間精度を表す。計算で得られた空間精度を Fig.7 に示す。全てのセル形状においても所期の精度を達成していることが分かる。またこの時の残差履歴を Fig.8 に示す。CFL 数は  $10^6$  とした。どの形状のセルにおいても残差はマシンゼロまで減少し、安定に計算出来た。

#### 3.2 翼型周りの圧縮性非粘性流れ場解析

本手法を 3次元オイラー方程式に適用し、ONERA-M6 翼型周りの非粘性流れ場を計算した。計算領域は

Table 1 The number of cells.

$\delta x$	hexahedron	tetrahedron	prism	pyramid
10	1,000	6,000	2,000	6,000
20	8,000	48,000	16,000	48,000
40	72,000	432,000	144,000	432,000

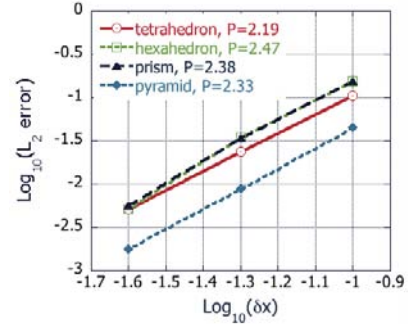


Fig. 7 Evaluated spatial accuracy.

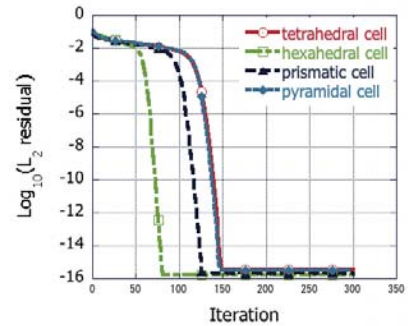


Fig. 8 Convergence histories.

四面体、プリズムおよびピラミッドで分割した。セル数はそれぞれ 361,748, 420,487, 5,382 である。Fig.9 に翼付近の計算セルを示す。マッハ数を 0.84、迎角を  $3.06[\text{deg}]$  として、CFL 数は  $10^6$  で計算をおこなった。

また、本計算では安定性を確保するためにスロープ・リミッターを導入した。本計算で用いたリミッターでは、TVB 性を考慮して、ガウス点における圧力とセル平均の圧力の差がセル平均値の 10% を超える場合に制限を施すという方法を用いた。

翼表面およびルート面での圧力等高線図を Fig.10 に示す。典型的なラムダ型の衝撃波が翼上面に捕らえられているのが分かる。また、このときの圧力係数分布を実験により得られた分布と共に Fig.11 に示す。非粘性計算であるため衝撃波位置が後退しているが、概ね解の一致は良好である。Fig.12 に得られた残差履歴を示す。これを見ると、非常に大きな CFL 数でも安定に収束解を得ていることが分かる。

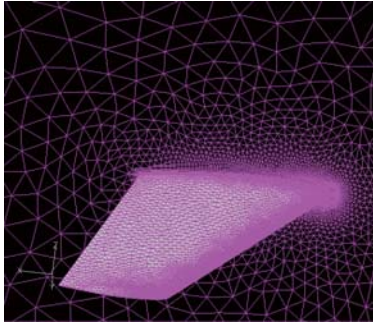


Fig. 9 Computational hybrid mesh.

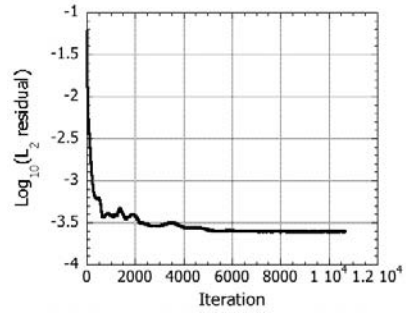


Fig. 12 Convergence history.

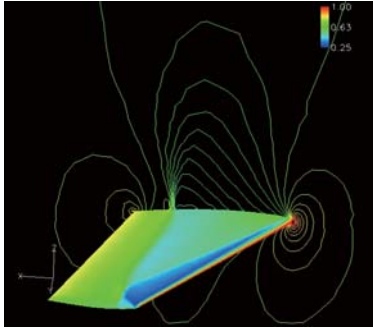


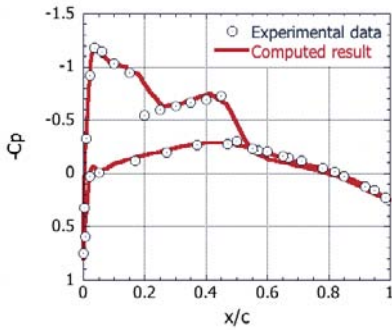
Fig. 10 Obtained pressure contours.

においても所期の空間精度を達成することを確認した。次に、構築した手法を用いて翼型周りの圧縮性非粘性流れ場解析を行った。衝撃波を含む場合においても、非常に大きな CFL 数で安定に収束解を得ることが出来た。

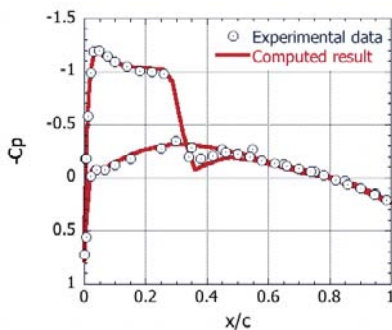
今後、本手法を圧縮性粘性解析に拡張していく予定である。

参考文献

- [1] Bath, T.J., "Aspects of Unstructure Grid and Finite Volume Solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations," AGARD Report 787 (1992), 6-1 - 6-61.
- [2] Liu, X-D., Osher, S. and Chan, T., "Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes," Journal of Computational Physics, Vol. 155 (2004), 200-212.
- [3] Cockburn, B. and Shu, C-W., "TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws IV: Multi-dimensional Systems," Journal of Computational Physics, Vol. 141 (1989), 199-244.
- [4] Wang, Z. J., "Spectral Finite Volume Method for Conservation Laws on Unstructured Grids," Journal of Computational Physics, Vol. 178 (2002), 210-251.
- [5] Yasue, K. Ohnishi, N., and Sawada, K., "A Pointwise Relaxation Computation of Viscous Compressible Flowfield Using Discontinuous Galerkin Method," AIAA paper, 2006-3893.
- [6] 保江, 大西, 澤田, "点緩和型陰的 Discontinuous Galerkin 法を用いた圧縮性流れ場の並列計算," 第 20 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (2006), E7-1.
- [7] Sherwin, S. J. and Karniadakis, G., "A New Triangular and Tetrahedral Basis for High-Order (hp) Finite Element Methods," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 38 (1995), 3775-3802.



(a)



(b)

Fig. 11 Pressure coefficient (Cp) profiles; (a) at 65% spanwise location and (b) 90% spanwise location.

4 まとめ

ハイブリッド格子に対する点緩和型陰的 Discontinuous Galerkin 法を構築した。はじめに、様々な形状の格子上で、本手法を用いて得られる空間精度を検証するために線形移流方程式を解いた。その結果、どの形状