

係数図法を用いた制御系設計ツールの開発

佐藤 英樹* 近藤 育史* 古賀 信行*

係数図法は、係数図（特性多項式の係数を片対数グラフ上に表現した図）の形状が制御系の特性（安定性／速応性／ロバスト性）を明確に表現していることを利用した制御系設計手法である。係数図法を用いて制御系を設計する場合には、設計仕様及び制御器の制約を考慮しながら特性多項式の係数を選定する必要があるため、係数図法に固有の概念を理解する必要がある。本報告では、係数図法を用いた制御系設計ツールの製作を通して修得した係数図法の技術を紹介した後、開発した制御系設計ツールの紹介及び設計事例によるツールの評価について記述する。

1. まえがき

制御系の設計の中で、フィードバック制御を主として扱う場合は、自動制御と呼ばれているが、エレクトロニクス技術の進歩により年々適用範囲は広がってきている。

また、制御系の設計は、制御技術者の手を離れ、機械、電気、航空宇宙、化学、食品と様々な分野で必要とされ、制御理論を詳しく知らなくても確実に良い制御系が設計できる設計手法が必要とされている。このような要求に応えるために提案された制御系設計手法が、係数図法である。

東海大学真鍋教授のご指導を頂き、98年度に自主研究で係数図法の技術修得を目的としたプロトタイプ版の製作を行った。

99年度は、自主研究で製作したプロトタイプを発展させ、開発工事として1入力1出力モデルに対応した制御系設計ツール（CDMTOOL：Coefficient Diagram Method Tool）を開発した。

2. 係数図法の紹介

係数図は、特性多項式の係数を片対数グラフ上に表現した図である。係数図法は、係数図の形状が制御系の特

性（安定性／速応性／ロバスト性）を明確に表現していることを利用した制御系設計手法である。

2.1 安定性／速応性／ロバスト性

制御系設計時の設計仕様として、安定性／速応性／ロバスト性が挙げられる。通常、制御系の設計時にはシステムの安定性／速応性／ロバスト性のバランスをとりながら設計を進めることとなる。表1に示すように、古典制御を適用して制御系を設計する場合には様々な手法により安定性／速応性／ロバスト性のバランスをとる必要がある。

係数図は、これらの特性を一つの図で表現しており、統一的に制御系の設計を行なうことが可能である。係数図法における安定性／速応性／ロバスト性の検証方法について次章以降で説明する。

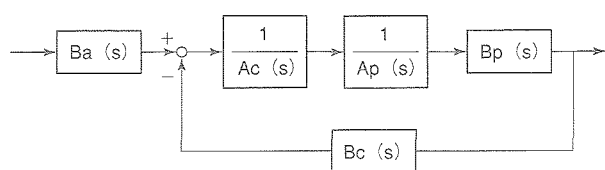
2.2 係数図

(1)係数図法基本ブロック図

係数図法基本ブロック図を図1に示す。係数図法基本ブロック図は、制御対象の状態方程式を可制御正準形に変換し、制御器の状態方程式を可観測正準系に変換したものをブロック図で表現したものである。係数図法では、対象とするシステムのブロック図を係数図法基本ブロック図に置き換えて取り扱う。

表1. 設計仕様

設計仕様	定義	検証手法	
		古典制御	係数図法
安定性	あるシステムが有界な入力または外乱を受ける時、応答の大きさが有界であれば、そのシステムは安定であるという。	極零配置図 ナイキスト線図 Routh-Hurwitzの方法	安定度指標
速応性	あるシステムが有界な入力または外乱を受けてから応答が収束するまでの時間の速さを表す指標。	立ち上がり時間 整定時間 行き過ぎ量	等価時定数
ロバスト性	システムの経年変化や外乱による応答がシステムの特性に及ぼす影響を示す指標。	ボード線図	部分係数図



$B_a(s)$: コマンド伝達関数
 $A_p(s)$: プラント伝達関数の分母
 $B_p(s)$: プラント伝達関数の分子
 $A_c(s)$: コントローラ伝達関数の分母
 $B_c(s)$: コントローラ伝達関数の分子

図1. 係数図法基本ブロック図

(2)係数図

係数図を図2に示す。係数図は、係数図法基本ブロック図における閉ループ伝達関数の特性多項式の係数 ($a_n, \dots, a_2, a_1, a_0$) を片対数グラフ上に表現した図である。

ここで、閉ループ伝達関数の特性多項式 $P(s)$ は、下式で表される。

$$P(s) = A_p(s) \cdot A_c(s) + B_p(s) \cdot B_c(s) \quad (1)$$

$$= a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad (2)$$

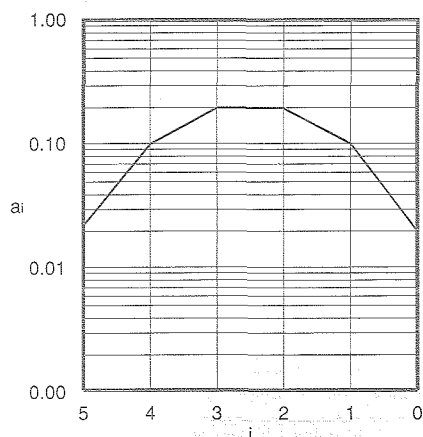


図2. 係数図

2.3 安定性

制御系の安定判別方法として極零配置図、ナイキスト線図による安定判別、Routh-Hurwitzの安定判別方法等があるが、係数図法では、係数図の曲率を表す安定度指標 γ_i を用いて安定性の評価を行なう。安定度指標 γ_i の算出式を(3)式に示す。

$$\gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1} a_{i-1}} \quad i=1 \sim n-1 \quad (3)$$

例として、固有振動数 ω_n 、減衰係数 ζ の2次多項式 $P(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ を考えれば、(3)式より、安定度指標 γ_1 は、

$$\gamma_1 = 4\zeta^2 \quad (4)$$

で表される。(4)式から、安定度指標 γ_1 は、特性多項式の部分2次多項式の減衰係数に対応することが分かる。一般に、減衰係数 ζ は安定性の指標であり、係数図法では安定度指標 γ_i に対応していることが分かる。

係数図の折れ線は上に凸の形であるが、この曲率が大きい程安定度指標 γ_i の値が大きくなり(減衰率が大きくなり)、安定性が良くなる。また、曲率が小さくなり、直線に近づくとき安定度指標 γ_i の値が小さくなり(減衰率が小さくなり)、安定性が悪くなる。

(図3参照)

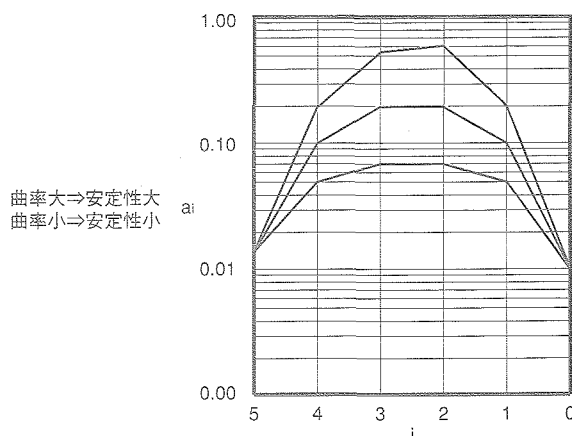


図3. 係数図による安定性

2.4 速応性

制御系の速応性の指標として立ち上がり時間、整定時間、行き過ぎ量等があるが、係数図法では、等価時定数 τ を用いて速応性の評価を行なう。

等価時定数 τ の算出式を(5)式に示す。

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad (5)$$

(5)式及び(3)式から、特性多項式の隣り合う2係数の関係式、(6)式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= \tau \\ \frac{a_2}{a_1} &= \frac{a_1}{a_0} \times \frac{a_2}{a_1^2} \times \frac{a_0}{a_1} = \frac{\tau}{\gamma_1} \\ \frac{a_3}{a_2} &= \frac{a_1}{a_0} \times \frac{a_2}{a_1^2} \times \frac{a_1}{a_2^2} \times \frac{a_0}{a_2} = \frac{\tau}{\gamma_1 \gamma_2} \\ &\vdots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\tau}{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

従って、閉ループ伝達関数の特性多項式 $P(s)$ は、

$$\begin{aligned} P(s) &= a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \\ &= \frac{a_0 \tau^n}{\gamma_1^{n-1} \dots \gamma_{n-1}} s^n + \dots + \frac{a_0 \tau^2}{\gamma_1} s^2 \end{aligned}$$

$$+ a_0 \tau s + a_0 = a_0 \left[\sum_{i=2}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}} \right) (\tau s)^i + \tau s + 1 \right] \quad (7)$$

で表される。

今、 $\tau = 1$ の時の $P(s) = 0$ の解を $p_i (i = 1 \sim n)$ とすると、閉ループの極 s_i は p_i / τ となり、閉ループの伝達関数は、

$$\begin{aligned} \text{閉ループ伝達関数} = & \frac{A}{s - p_1 / \tau} + \frac{B}{s - p_2 / \tau} \cdots \\ & + \frac{C}{s - p_n / \tau} \quad (8) \end{aligned}$$

(A,B,C: 定数)

となる。ここで、(8)式を逆ラプラス変換し、時間領域の応答を求めると、

$$\text{時間応答関数} = Ae^{p_1 / \tau t} + Be^{p_2 / \tau t} + \cdots + Ce^{p_n / \tau t} \quad (9)$$

を得る。上式から、等価時定数 τ が、系の応答速度の指標であることは明らかである。

等価時定数 τ は、係数図の右端の線分の傾きに相当し、傾きが左下がりになるほど応答が速く、傾きが左上がりになるほど応答が遅くなる。

2.5 ロバスト性

ロバスト性は、制御対象のパラメータの変化に対する応答の変化として表れる。係数図法では、制御対象のパラメータの変化に対する特性多項式の係数折れ線の変化として考える。具体的には、特定のパラメータの変化に対する折れ線を幾つか予め求めておき、それによって安定性・速応性の変化を推定する方法をとる。

表2. CDMTOOL操作画面概要

画面名称	機能概要	操作画面図
パラメータ入力画面	制御モデルを入力する。	図4
設計画面	係数図とその制御応答を表示する。	図5
設計結果一覧表示画面	設計を行なった結果を表示する。	図6

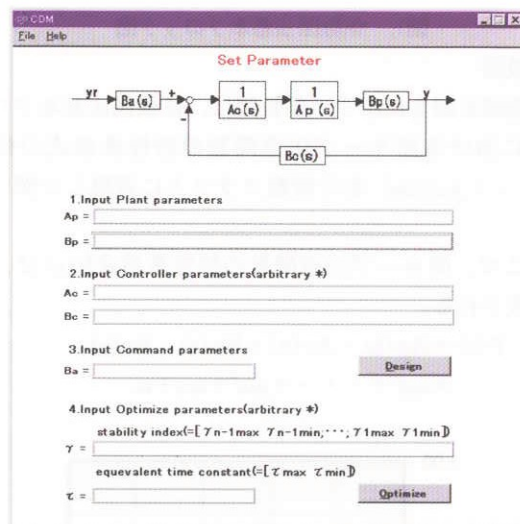


図4. パラメータ入力画面

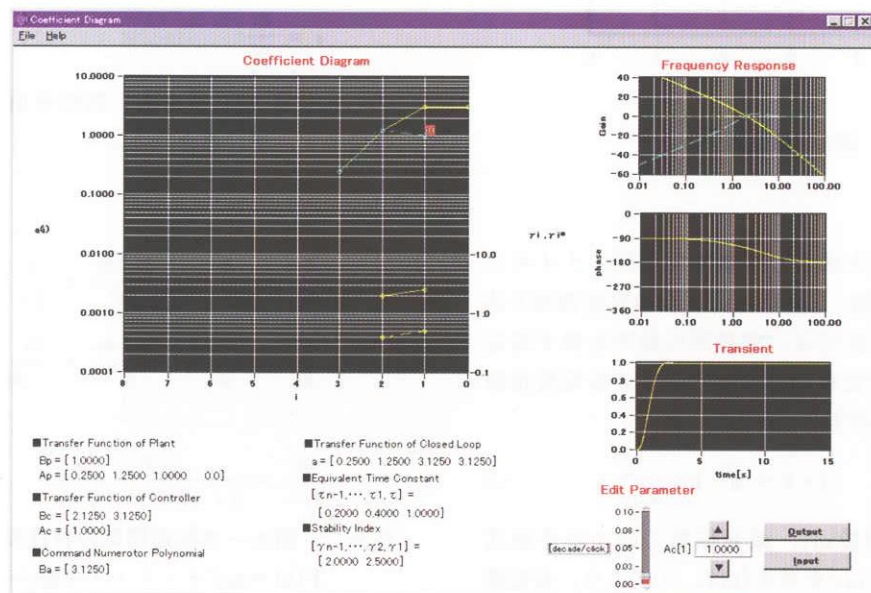


図5. 設計画面

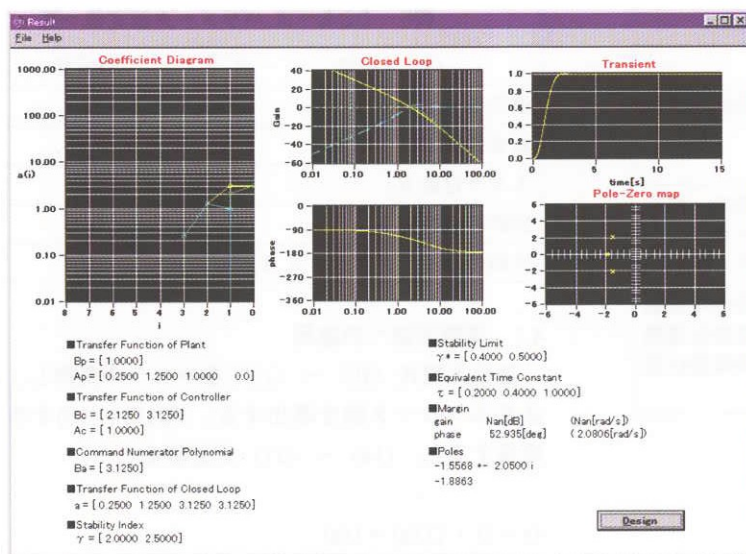


図6. 設計結果一覧表示画面

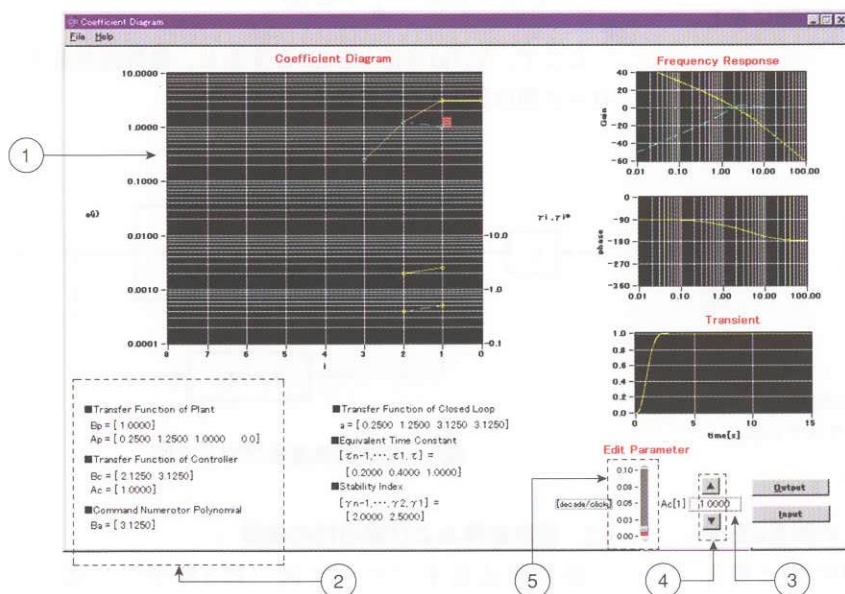


図7. 設計画面

表3. オブジェクトの機能一覧

No	オブジェクト	機能
1	係数図表示グラフ	・ 設定された制御対象パラメータおよび制御器パラメータに対応した係数図を表示する。
2	パラメータ値表示 メッセージボックス	・ 現在設定されているパラメータ情報を表示する。 ・ マウスクリックにより変更パラメータを決定する。
3	パラメータ値表示 エディットボックス	・ 変更パラメータ値を表示する。 (キーボードによる入力も可)
4	パラメータ 変更ボタン	・ インジケータバーに従って、変更パラメータ値を変更する。
5	変更量調整 インジケータバー	・ パラメータ変更ボタン押下時のパラメータ変動量を設定する。

3. CDMTOOL

CDMTOOLの操作画面概要を表2に示し、各操作画面を図4～図6に示す。

本ツールは、画面Optimize機能および計算Optimize機能の2種類の設計機能を持つ。各設計機能の機能概要を次章に示す。

3.1 設計機能

(1) 画面Optimize機能

画面Optimize機能は、係数図の形を確認しながら制御器パラメータの設計を行なう機能である。CDMTOOLでは、設計画面(図7参照)の各オブジェクトに表3に示す機能を持たせることにより、画面Optimize機能を実現している。

(2) 計算Optimize機能

計算Optimize機能は、設計条件(設計仕様)を満足する制御器伝達関数を自動算出する機能である。

CDMTOOLでは、設計条件として下記のパラメータを使用し、制御器伝達関数に関する連立方程式を解くことで、設計条件を満足する制御器伝達関数の算出を実現している。

- ・ 制御対象伝達関数
- ・ 安定度指標／等価時定数の目標範囲
- ・ 制御器伝達関数の次元

連立方程式の計算方法は、制御器の制約により異なる。表4に各計算方法の概要を示す。

表4. 計算Optimize機能計算方法

制御器の制約	計算方法
制御器伝達関数の次数 = 方程式の数の場合	代数計算により制御器伝達関数を算出する。
制御器伝達関数の次数 > 方程式の数の場合	制御器伝達関数の次数の一部を任意に決定後、代数計算により制御器伝達関数を算出する。
制御器伝達関数の次数 < 方程式の数の場合	種々の安定度指標と等価時定数の組合せにより、制御器伝達関数を算出し、最適な制御器伝達関数を決定する。

4. CDMTOOLによる制御系設計検証

本章では、DCモータの位置制御を取り上げ、CDMTOOLの妥当性の確認を行なう¹⁾。DCモータは現在用いられているモータの中では最も精密に制御のできる高性能モータである。DCモータの概略図を図8に示し、運動方程式を(10)～(12)式に示す。

$$J \cdot \frac{d\omega_r(t)}{dt} + B_T \cdot \omega_r(t) = K_T \cdot i_a(t) \quad (10)$$

$$L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + R_a \cdot i_a(t) = u(t) \quad (11)$$

$$u(t) = v_a(t) - K_e \cdot \omega_r(t) \quad (12)$$

K_T ：トルク定数、 $\omega_r(t)$ ：回転角速度、 J ：慣性モーメント、 $i_a(t)$ ：電機子電流、 B_T ：減衰係数、 $v_a(t)$ ：直流印加電圧、 L_a 、 R_a ：電機子巻線および回路の全抵抗と全インダクタンス、 K_e ：逆起電力定数、 $u(t)$ ：制御入力

位置制御では、目標位置 r と現在位置 y との誤差 e を小さくすることが目的となる。ここで、目標位置 r と現在位置 y との誤差 e は、次式にて表される。

$$e(t) = r - y(t) = r - \int_0^t \omega_r(\tau) d\tau \quad (13)$$

尚、簡単のため、DCモータの各パラメータは、表5を用いる。

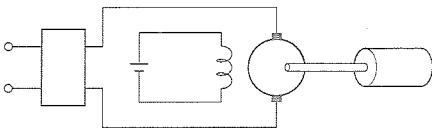


図8. DCモータ

表5. DCモータ パラメータ設定値一覧

パラメータ	設定値
慣性モーメント J	1
減衰係数 B_T	1
トルク定数 K_T	1
回路の全抵抗 L_a	0.25
回路の全インダクタンス R_a	1

4.1 係数図法への適用

運動方程式 (10) ～ (13) をラプラス変換し、係数図法基本ブロック図を導出する。式(10)～(13)をラプラス変換すると、(14) ～ (17) 式を得る。

$$(s+1) \cdot \Omega(s) = I(s) \quad (14)$$

$$(0.25s+1) \cdot I(s) = U(s) \quad (15)$$

$$U(s) = V_a(s) - K_e \cdot \Omega(s) \quad (16)$$

$$E(s) = R(s) - \frac{1}{s} \cdot \Omega(s) \quad (17)$$

ここで、 $V_a(s) = K_r \cdot E(s)$ とすると、係数図法基本ブロック図は図9のようになる。

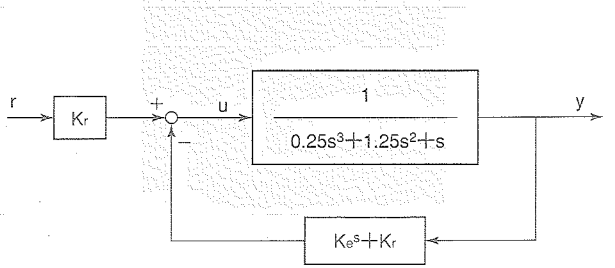


図9. 係数図法基本ブロック図

4.2 設計結果および妥当性の確認

係数図法基本ブロック図 (図9参照) に従って、CDMTOOLを用いて制御系設計を行なった結果を図10に示し、設計に用いた入力パラメータを表6に示す。

同様に、最適サーボ制御を用いて設計した結果を係数図法基本ブロック図に変換したものを図11に示す。ただし、最適サーボ制御の重み係数は、同程度の速応性を持つように重み係数を設定した。

係数図法による設計結果及び最適サーボによる設計結果の制御特性を表7にまとめる。

尚、安定性／ロバスト性はゲイン余裕／位相余裕を評価指標とした。

表6. 計算Optimize機能入力

設定パラメータ	設定値
プラント伝達関数の分母 $A_p(s)$	[0.25 1.25 1 0]
プラント伝達関数の分子 $B_p(s)$	[1]
コントローラ伝達関数の分母 $A_c(s)$	[*]
コントローラ伝達関数の分子 $B_c(s)$	[**]
コマンド伝達関数 $B_a(s)$	[1]
安定度指標 γ_i	[2 2.25 2.5]
等価時定数 τ	[10 1]

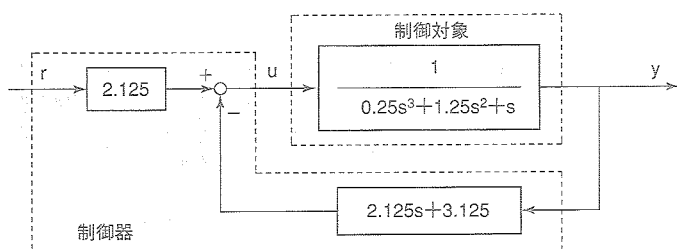


図10. 係数図法による設計結果

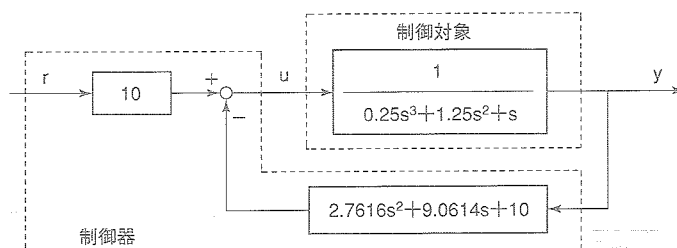


図11. 最適サーボによる設計結果

表7. 制御特性の比較

項目	最適サーボ制御	係数図法
ゲイン余裕 [dB]	無限大	無限大
位相余裕 [deg]	98.427	52.936

5. むすび

最適サーボ制御が高い位相余裕となるのは、最適レギュレータを用いているためである。係数図法の結果も最適サーボ制御ほど位相余裕は高くないが、無限大のゲイン余裕と、 52° の位相余裕が得られており十分ロバスト性のある制御系であるといえる。

また下記より、CDMTOOLによる制御系は最適サーボによる制御系より、高周波の減衰が極端に良く、雑音の影響が少なくロバスト性も高いことがわかる。

最適サーボ制御

$$G(s) = \frac{2.7616s^2 + 9.0614s + 10}{0.25s^3 + 1.25s^2 + s} \approx \frac{11.0464}{s} \quad (s \rightarrow \infty)$$

CDMTOOL

$$G(s) = \frac{2.125s + 3.15}{0.25s^3 + 1.25s^2 + s} \approx \left(\frac{2.915}{s} \right)^2 \quad (s \rightarrow \infty)$$

係数図法基本ブロック線図で考えた場合、最適サーボ制御のコントローラの次元が2次になる。これは最適サーボ制御が全状態量フィードバック制御であるためである。それに対し、係数図法のコントローラの次元は1次である。そのため、DCモータの位置制御に関して、係数図法による制御系はより安価なコントローラで最適サーボ制御と同等の制御結果が得られることがわかった。

現在、CDMTOOLは1入力1出力モデルのみに対応している。今後は、1入力多出力モデル、さらには多入力多出力モデルへの対応を行っていく。

CDMTOOLの開発にあたり、多大なご指導を頂いた東海大学真鍋教授に感謝の意を表する。

参考文献

- (1) Manabe, S. "COEFFICIENT DIAGRAM METHOD". 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, August 24-28, 1998, Seoul, Korea
- (2) 土谷武士、江上正 "現代制御工学"、産業図書 (1991)