Kolmogorov理論と交差独立性仮説

細川　巌（電気通信大学名誉教授）

Kolmogorov's Theory vs. the Cross-Independence Hypothesis

Iwao Hosokawa (Prof. Emeritus, Univ. Electro-Comm.)

ABSTRACT

It is proved that the cross-independence hypothesis by Tatsumi and Yoshimura in homogeneous isotropic turbuloence is inconsistent with Kolmogorov's theory of the structure functions of longitudinal velocity increment across distance r in the inertial range of r. Related to this, an unexpected paradox is found in the 1962 Kolmogorov (refined similarity) hypothesis.

Key Words: Isotropic turbulence, Cross-independence hypothesis, structure functions, Kolmogorov's 4/5th law

1．はじめに

「交差独立性」という仮説は，最近　Tatsumi & Yoshimura(2004)[1] によって減衰一様等方性乱流の解析に使われていることは周知のとおりである。

一様等方性乱流で，１点分布函数を$f(\mathbf{v},t)$，２点分布函数を$f^{(2)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{r},t)$とする。ここで$\mathbf{v}$は速度ベクトルを示し，$\mathbf{r}$は２点間の距離ベクトル，tは時間変数である。「交差独立性」仮説というのは，２点における速度$(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$の積空間を

$$\mathbf{v}_+ = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2 \tag{1}$$

と

$$\mathbf{v}_- = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)/2 \tag{2}$$

の積空間に変換し，

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{r},t) = 2^{-3}\, g^{(2)}(\mathbf{v}_+,\mathbf{v}_-,\mathbf{r},t) \tag{3}$$

そこで

$$g^{(2)}(\mathbf{v}_+,\mathbf{v}_-,\mathbf{r},t) = g_+(\mathbf{v}_+,\mathbf{r},t)\, g_-(\mathbf{v}_-,\mathbf{r},t) \tag{4}$$

と仮定することである。これは$\mathbf{v}_+$と$\mathbf{v}_-$が相互に独立な乱数と仮定することである。

これが，$|\mathbf{r}|$の慣性領域において，速度構造関数についてのKolmogorov理論[2，3]と明らかに矛盾することを証明し，これに関連してKolmogorov仮説[3]それ自体の問題をも追求する。

2．矛盾の証明

(1)と(2)から$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$,であるから，これらのベクトルの第一成分をベクトル$\mathbf{r}$の方向に取って，それらを新たに添字１をつけて表記し，v_{11}とv_{21}の3次の統計平均を考えよう。すなわち

$$\begin{aligned}\langle v_{11}^{\,3}\rangle &= \langle v_{+1}^{\,3}\rangle + 3\langle v_{+1}^{\,2} v_{-1}\rangle \\ &\quad + 3\langle v_{+1} v_{-1}^{\,2}\rangle + \langle v_{-1}^{\,3}\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\langle v_{21}^{\,3}\rangle &= \langle v_{+1}^{\,3}\rangle - 3\langle v_{+1}^{\,2} v_{-1}\rangle \\ &\quad + 3\langle v_{+1} v_{-1}^{\,2}\rangle - \langle v_{-1}^{\,3}\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

ここに$\langle\quad\rangle$は統計平均値を意味する。

統計的一様性によって$\langle v_{11}^{\,3}\rangle = \langle v_{21}^{\,3}\rangle$であるから，前２式より

$$0 = 6\langle v_{+1}^{\,2} v_{-1}\rangle + 2\langle v_{-1}^{\,3}\rangle \tag{7}$$

が得られる。

交差独立性によれば，

$$\langle v_{+1}^{\,2} v_{-1}\rangle = \langle v_{+1}^{\,2}\rangle\langle v_{-1}\rangle = 0 \tag{8}$$

であるから，(7)の第2項は消えなければならない。

しかし，これはKolmogorovの一様等方性乱流のrの慣性領域における理論的結果[2]：

$$8\langle v_{-1}^{\,3}\rangle \equiv \langle \Delta u_r^{\,3}\rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon r \tag{9}$$

と相容れない。ここでεはエネルギーの平均散逸率である。言い換えれば，交差独立性は3次の速度構造関数の存在を否定することになる。

V11とV21の3次以上の奇数次の統計平均の比較から，同様の理由によって，すべての3次以上の奇数次の速度構造関数の存在[3]は交差独立性とは相容れない。

(9)式の理論的導出の際に，$\left\langle \Delta u_r^{\,2} \right\rangle$の時間依存性が無視されているので，減衰（非定常）一様等方性乱流の場合にはそこに若干の補正項が入らなければならない。Tatsumi & Yoshimuraの減衰乱流の場合にどうなるかを第４節で説明する。

３．Kolmogorov仮説の中のパラドックス

交差独立性が成り立たない結果として，(7)と(9)より

$$\left\langle v_{+1}^{\;2} v_{-1} \right\rangle = \varepsilon r / 30 \tag{10}$$

が得られる。これは，定常等方性乱流の慣性領域において速度和の統計が満たさなければならない普遍的な条件式である。

今までは，乱流の間欠的構造は速度差の分布関数によって議論されてきたが，速度和が速度差に独立でないとすると，速度差のアンサンブルは速度和によって条件づけられることになり，このことを踏まえて理論を再考する必要が発生する。

１９６２年のKolmogorov仮説[3]によれば，慣性領域において速度差は

$$2v_{-1} \equiv \Delta u_r = V\left(r\varepsilon_r\right)^{1/3} \tag{11}$$

と仮定される（ε_rはスケールrの領域でのエネルギーの局所平均散逸率，*Vはε_rに独立で局所の速度にも依存しない普遍無次元乱数。）ので，これを(10)に入れると，*

$$\left\langle v_{+1}^{\;2} V \varepsilon_r^{\;1/3} \right\rangle = \varepsilon r^{2/3} / 15 \tag{12}$$

が出てくる。

これはVが速度和と独立でないことを意味する。$\left\langle V \right\rangle = 0$であるから，少なくとも$V$は$v_{+1}$と独立であることはできない。

*v_{+1}は局所の速度によって構成されるので，これは極めて重大な結論である。このことは「Vは普遍無次元乱数」とする*Kolmogorov仮説[3]にとって，逃れることのできないパラドックスになっていると言わなければならない。

*明らかに，Vのアンサンブルは*普遍的ではなく，速度和によって条件づけられている筈である。

これによって(11)を基礎とする今までの理論がすべて疑わしくなるかと言うと，必ずしもそうではない。パラドックスを無害にする方法が一つある。それは，(12)において「ε_rは速度和から独立である」と改めて仮定することである。そうして，(11)式のモーメントのv_{+1}についての平均を取って

$$\overline{\left(2v_{-1}\right)^n} \equiv \overline{\Delta u_r^{\;n}} = \overline{V^n}\left(r\varepsilon_r\right)^{n/3} \tag{13}$$

とすれば，(11)式を基礎とした従来の間欠性理論は，このアンサンブル平均の意味ですべて無傷となる。

４．(9)式の時間微分補正項

Landau & Lifshitz[4]によれば，(9)式右辺の補正項は

$$-\frac{3}{r^4}\int_0^r r^4 \frac{\partial B_{rr}}{\partial t} dr \tag{14}$$

と書くことができる。ここでKolmogorovの仮説[5]により

$$B_{rr} = \left\langle \Delta u_r^{\;2} \right\rangle \cong A\left(\varepsilon r\right)^{2/3}, \tag{15}$$

（Ａは普遍定数）と置く。減衰乱流の解[1]：$\varepsilon(t) = 3\alpha_0 t^{-2}$ を入れて計算すると

$$\begin{aligned}(14)\text{式} &= -\frac{6}{17} A r^{5/3} \frac{d\varepsilon}{dt} \varepsilon^{-1/3} \\ &= \frac{12}{17} A \varepsilon r^{5/3} (3\alpha_0 t)^{-1/3} \\ &= \frac{8}{17} A \varepsilon r \left(\frac{r}{L(t)}\right)^{2/3},\end{aligned} \tag{16}$$

ここに，$L(t) = \dfrac{2^{3/2}}{3}\left(\alpha_0 t\right)^{1/2}$*は前回講演，「交差独立性仮説」の検討[6]で導出したマクロスケールである。*

これが(9)式右辺と比べて，$r / L(t) << 1$（慣性領域）において無視できることは論をまたない。

よって，本論の趣旨はref.1の減衰一様等方性乱流においても成立すると考えてよい。

引用文献

1) T. Tatsumi & T. Yoshimura, Fluid Dyn. Res. **35**, 123 (2004).
2) A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **32**, 16 (1941).
3) A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. **13**, 82 (1962).
4) L. D. Landau & E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (Pergamon, 1987), p. 139.
5) A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 9 (1941).
6) 細川巌，第３７回「境界層遷移の解明と制御」研究会（２００５）報告集（JAXA SP 刊行予定).