

# こまの運動に関する一考察

## A Note on Top Spin

森下悦生\*

Etsuo Morishita

We sometimes have difficulties to understand the reason why an ideal top never topples. Physicist might explain that angular momentum conserves. Students could not imagine the fact that a top spins continuously because angular momentum is constant. A pole stands still when pulled radially by many ropes, and no one doubts this. This is also the case for a top spin. Centrifugal and centripetal forces appear instead of the rope tension. In this short note, we first would like to introduce this pole-rope analogy for a spinning top. Secondary, we show that precession can be explained by several concepts. One is Eulerian and another is Feynmanian. The last one is Newtonian. Euler's and Feynman's interpretations both base on the conservation of angular momentum. Newtonian approach shows that actually Coriolis' force play an important role for mischievous gyro moment.

Keywords : rigid body, Euler equation, spin, top

### 1. はじめに

本稿は、芝浦工業大学デザイン工学科の機械力学[1]の講義項目である剛体の運動に関連するもので、こまの運動について、従来の教科書[2],[3]の記述や、著者の考えを交えて解釈してみたものである。

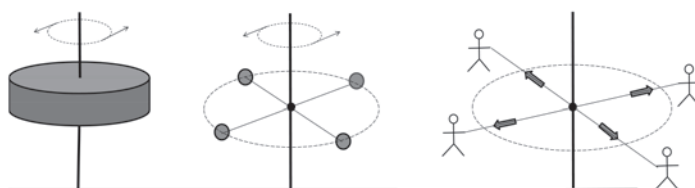
理想的なこまが倒れない理由は、力学的には角運動量の保存則で説明される。初学者にとってはかなり抽象的な表現であり、物理的な理解に達するのは容易とは言えない。本稿では、棒を紐で周囲から均等に引っ張れば倒れないことが、こまのアナロジーになり得ることを紹介する。

こまの運動で不思議なもの他の一つは、水平面内の歳差運動(precession)であり、オイラーによって角運動量の保存から説明されている。ここでは、ファイマン[3]によっても紹介されている、より直感的な解釈と、こまの微小部分に作用するコリオリ力を利用したニュートンの解釈を併せて示す。

こまの運動の理解の一つの試みであり、教育において活用できるもとと考える。

### 2. こまが倒れない理由

図1は、直立回転する眠りこまが倒れない理由を理解するいくつかのパターンを示したものである。



(a) こま (b) 質点系のこま (c) こまのアナロジー

図1 回転するこまは倒れない

Fig.1 Top Spin Analogy

力学的には、摩擦が無いものとする、図1(a)の場合、

$$L = I\omega \tag{1}$$

なる角運動量ベクトル  $L$  が保存されるという説明になる。 $I$  は慣性モーメントの大きさ、 $\omega$  は角速度ベクトルである。

図1 (b) は、こまを質点系でモデル化して、回転に伴ってこまの各部分に作用する向心力の反作用としての遠心力が、中心軸を四方八方から引っ張っているため倒れないという理解の仕方を表している。

図1 (c) は、ちょうど皆がひも引っ張って棒が倒れないようにしたい状態、こまとの類似性(アナロジー)による理解である。著者はこの説明の仕方が分かり易いと考える。

\* デザイン工学部デザイン工学科 非常勤講師, 東京大学名誉教授  
Part-time lecturer, Engineering Design/Product Design Courses, College of Engineering and Design  
Emeritus Professor, The University of Tokyo

### 3. 水平面内定常歳差運動の理解法

図2はこまの支点0が動かないものとした場合の運動の様子を表している。ここで、 $g$ は重力加速度の大きさ、 $l$ は重心までの距離、 $m$ はこまの質量、 $\theta$ は $z$ 軸とこまの回転軸のなす角度、 $\Omega$ は定常歳差運動の角速度、である。

図2 (a) の場合は、直立して回転している場合で、眠りごまと呼ばれる。回転数が高い場合この状態に近い。

図2 (b) は、首振り運動、いわゆる定常歳差運動 (precession)[2]を表していて、歳差運動の回転の向きは上から見たこまの回転方向と一致している。

図2 (c) は、定常歳差運動の特別な場合で、こまは水平面内で運動する ( $\theta = \pi/2$ )。

#### 3.1 オイラー的な解釈

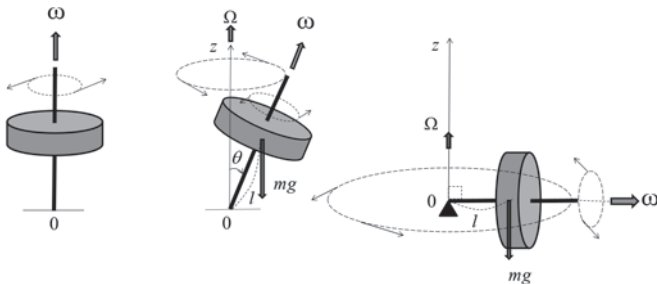
図2 (c) の場合、こまの軸回りの角運動量の大きさ  $L = I\omega$  の単位時間あたりの変化の大きさは図3のように  $(I\omega)\Omega$  となり、この値が重力により0点回りに生ずるモーメントの大きさに等しくなることから、

$$(I\omega)\Omega = mgl \tag{2}$$

これより、

$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega} \tag{3}$$

オイラーの式を用いると、 $z$  軸周りの慣性モーメントを  $J$  として、



(a)眠りごま (b)歳差運動 (c)歳差運動  $\theta = \pi/2$

図2 こまの運動  
Fig.2 Spin Mode

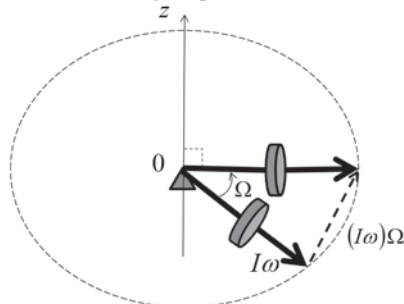


図3 水平面内定常歳差運動のオイラー的理解  
Fig.3 Eulerian Mechanics

$$\frac{dL}{dt} \Big|_* + \Omega \times L = N \tag{4}$$

ここで、 $t$  は時間、

$$L = (I\omega)i + (J\Omega)k \tag{5}$$

$$\Omega = \Omega k \tag{6}$$

$$N = (mgl)j \tag{7}$$

であり、 $i, j, k$  はこまに固定した、角速度  $\Omega$  の回転座標における単位ベクトル、 $*$  はこまに固定した回転座標における微分である。回転座標系では、

$$\frac{dL}{dt} \Big|_* = 0 \tag{8}$$

$$\Omega \times L = N \quad [(I\omega)\Omega j = (mgl)j] \tag{9}$$

であるから、やはり (2) 式の結果が得られる。

#### 3.2 ファイマン的な解釈

次に、歳差運動をもう少し現象的に理解してみよう。似たような解釈はファイマンの力学の教科書[2]にも見られる。

図4は、水平な  $x-y$  面内で歳差運動を行うこまを、 $z$  軸上方より見た状態を表している。最初こまの先端を保持し、ついで静かに手放したものとす。その直後重力の作用で先端は僅かに下がることが予想される。こまの軸先端が下がると、こまは上から見て図4のように楕円形に見えるはずである。この状態では、こまの紙面から出る方向に回転している部分は右方に、紙面に入り込むように回転している部分は左方に移動することになる。すなわち、こまは図4の  $x-y$  水平面内で、 $z$  軸周りに、時計回りの振り、すなわちモーメントを受けた状態となる。しかし、支点0は回転自由であるため、こまは反動で、逆に反時計回りに歳差運動を行うことになる。そもそも  $z$  軸周りに外部から加わったモーメントは存在しない、すなわち  $z$  軸回りの角運動量が保存されたということになる。こまの特定点Pは、図4点線のような螺旋状の運動を行う。

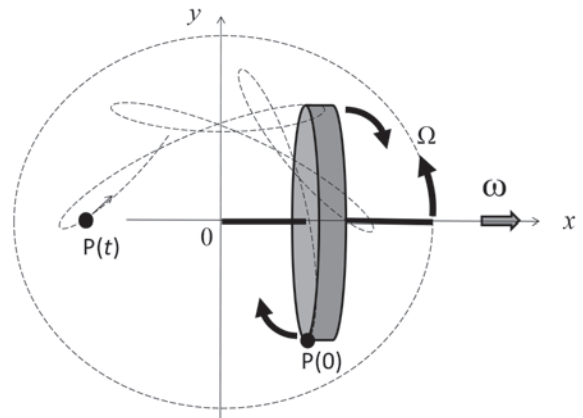


図4 水平面内定常歳差運動のファイマン的理解  
Fig.4 Feynmanian Mechanics

### 3.3 ニュートン的な解釈

角運動量を用いたオイラー的な説明は、数学的にも物理的にも洗練されたものであるが、ニュートン的な立場、すなわち、どのような力が作用して歳差運動が生じているのか調べてみるのは興味深いことである。質点の相対運動による理解について考える。

図5のような、原点0から測って  $r_0$  にある、こまの微小部分の質量  $\Delta m$  について、定常歳差運動の角速度  $\Omega$  で回転する座標系  $x y z$  における運動方程式は[2]、

$$\Delta m \frac{dw}{dt} \Big|_* = \Delta m \left[ -g \mathbf{k} + 2\mathbf{w} \times \Omega + \Omega \times (\mathbf{r}_0 \times \Omega) + \mathbf{r}_0 \times \dot{\Omega} \right] \quad (10)$$

$$\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{l} + \mathbf{r} = l\mathbf{i} + r\mathbf{e}_r \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_r \equiv -j \cos \theta + k \sin \theta \quad (12)$$

$\mathbf{e}_r$  は、こまの重心から半径方向  $r$  に向かう単位ベクトル、 $\theta$  は水平面から測った角度である。こまは円板とみなし、図5こまの重心C.G.から測って  $r$  における、回転座標系内におけるこまの相対速度  $\mathbf{w}$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= r\boldsymbol{\omega}(-j \sin \theta - k \cos \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

また、 $xyz$ 回転座標系において、

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} \Big|_* = r\omega^2 \mathbf{e}_r \quad (14)$$

(14)式は、 $r$ 方向の遠心力であるが、周方向に均一のため、こま全体については相殺する。

(10)式の右辺括弧内第2項、すなわちコリオリの力がこまが重力に対抗できる要因となることを示そう。

(10)式の両辺に  $\mathbf{r}_0$  をかけて、こま全体について積分すれば、左辺については、こま各部の遠心力による原点周りのモーメントも相殺するので、

$$\int \mathbf{r}_0 \times \Delta m \frac{d\mathbf{w}}{dt} \Big|_* = 0 \quad (15)$$

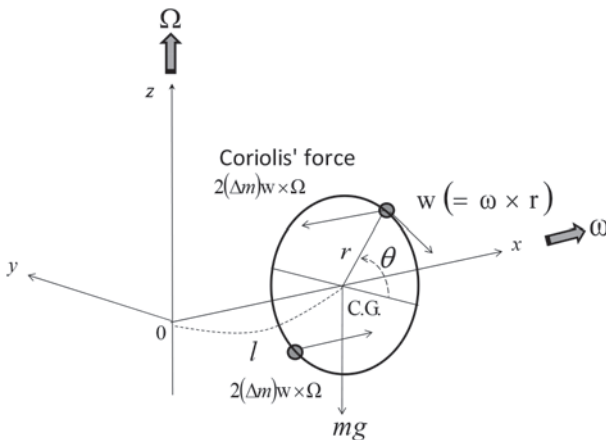


図5 水平面内定常歳差運動のニュートン的理解  
Fig. 5 Newtonian Mechanics

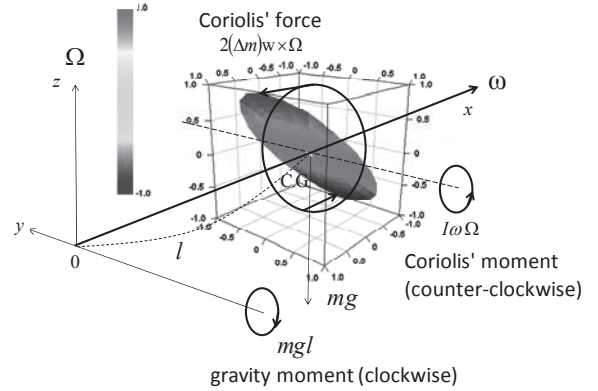


図6 重力に対抗するコリオリ力  
Fig.6 Gravity vs. Coriolis' Force

(10)式右辺括弧内第1項の重力によるモーメントは、(4)式の  $N$  に対応して、

$$\int \mathbf{r}_0 \times \Delta m g(-\mathbf{k}) = mgl \mathbf{j} \quad (16)$$

(10)式右辺括弧内第2項のコリオリ力は

$$\begin{aligned} 2\mathbf{w} \times \Omega &= 2r\boldsymbol{\omega}(-j \sin \theta - k \cos \theta) \times \Omega \mathbf{k} \\ &= -2r\omega \Omega \sin \theta \mathbf{i} \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式から、コリオリ力は図5にも示されるように、こまの上半分では手前に、下半分では  $x$  軸の正方向に作用し、こまを重力によるモーメントに対抗して、引き起こそうという作用になり、大きさは(17)式から、図6のように、 $r \sin \theta$  に比例する。すなわち、その大きさは、こまの重心を通り  $y$  軸に平行な直線(図6点線)と、こま各部の距離に比例する。

コリオリ力による原点周りのモーメントは、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 \times \Delta m (2\mathbf{w} \times \Omega) &= -2\Delta m r^2 \omega \Omega \sin \theta (-j \cos \theta + k \sin \theta) \times \mathbf{i} \\ &= -2\Delta m r^2 \omega \Omega \sin \theta (k \cos \theta + j \sin \theta) \end{aligned} \quad (18)$$

こまが、厚さ  $h$ 、半径  $a$  の円板であれば、その密度を  $\rho$ 、微小体積を  $\Delta V$  として、

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho(r \Delta \theta)(\Delta r) h \quad (19)$$

こま全体では、

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} -2\Delta m r^2 \omega \Omega \sin \theta (k \cos \theta + j \sin \theta) \\ &= -j \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a 2[\rho(r \Delta \theta)(\Delta r) h] r^2 \omega \Omega \sin^2 \theta \\ &= -j \left[ \rho h \int_0^a r^3 dr \right] \left[ 2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right] \omega \Omega \quad (20) \\ &= -j \left( \rho h \frac{a^4}{2} \right) \pi \omega \Omega = j \left( \frac{1}{2} m a^2 \omega \right) \Omega \\ &= -(I\boldsymbol{\omega}) \Omega \mathbf{j} \quad (= -\Omega \times L) \end{aligned}$$

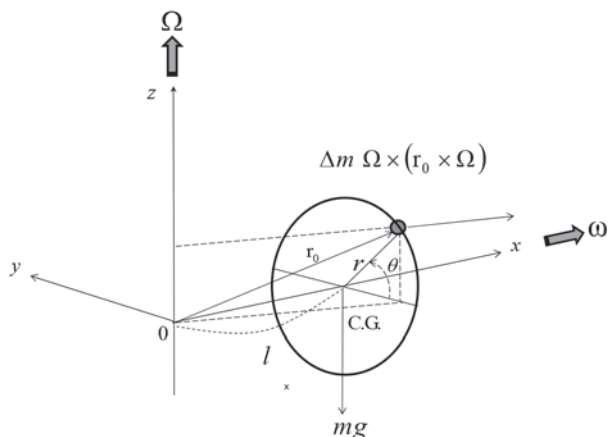


図7 こまに作用する遠心力  
Fig.7 Centrifugal Force

ここで、(15)、(20)式において、

$$I = \frac{1}{2} m a^2 \quad (21)$$

は円板の慣性モーメントである。

図6のように、時計回りの重力によるモーメント  $mg l$  と、反時計回りのコリオリ力によってこまが引き起こされるモーメント  $I \dot{\Omega}$  が釣り合っ、こまの回転軸は水平面に維持され、結局(2)式、あるいは(9)式と同じ関係が得られる。

確認のために、遠心力に対応する(10)式左辺括弧内第3項は

$$(\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\Omega}) = [l\mathbf{i} + r(-j \cos \theta + k \sin \theta)] \times \Omega \mathbf{k} \\ = -l\Omega j - r\Omega \cos \theta \mathbf{i} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\Omega}) = (l\Omega j + r\Omega \cos \theta \mathbf{i}) \times \Omega \mathbf{k} \\ = (li - r \cos \theta j) \Omega^2 \quad (23)$$

図7に遠心力の様子を示す。(23)式から、重心に作用する遠心力  $m l \Omega^2$  は残り、支点0の反力で対抗する。

原点周りのモーメントは

$$\mathbf{r}_0 \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\Omega})] = [l\mathbf{i} + r(-j \cos \theta + k \sin \theta)] \\ \times (l\Omega^2 \mathbf{i} - r\Omega^2 \cos \theta \mathbf{j}) \\ = lr\Omega^2 \sin \theta j + r^2 \Omega^2 \cos \theta \sin \theta \mathbf{i} \quad (24)$$

となり、こま全体については相殺する項となる。

第4項は

$$\mathbf{r}_0 \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} = (li + r e_r) \times \dot{\Omega} \mathbf{k} \\ = [l\mathbf{i} + r(-j \cos \theta + k \sin \theta)] \times \dot{\Omega} \mathbf{k} \\ = -l\dot{\Omega} j - r \cos \theta \dot{\Omega} \mathbf{i} \quad (25)$$

(25)式は  $\dot{\Omega}$  に伴う外力相当になり、図8にその様子を示す。

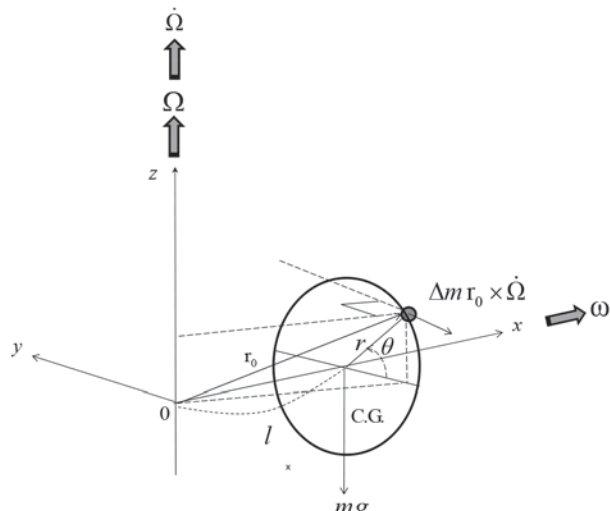


図8  $\dot{\Omega}$  による加速度  
Fig.8 Unsteady Acceleration

原点周りのモーメントは、

$$\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}) \\ = [l\mathbf{i} + r(-j \cos \theta + k \sin \theta)] \times (-l\dot{\Omega} j - r \cos \theta \dot{\Omega} \mathbf{i}) \\ = -l^2 \dot{\Omega} \mathbf{k} - r^2 \dot{\Omega} \cos^2 \theta \mathbf{k} + rl \dot{\Omega} \sin \theta \mathbf{i} - r^2 \dot{\Omega} \cos \theta \sin \theta j \quad (26)$$

今の設定は  $\dot{\Omega} = 0$  であるので、この項は影響しない。

$\dot{\Omega} \neq 0$  の場合には、z軸周りのモーメントが発生することになるが、定常歳差運動には対応しない。

このように、コリオリ力による引き起こしのモーメントであるというような理解も可能である。静止座標系で記述しても、当然同じ結果が得られる。

#### 4. こまの実験観察

こまの運動は数式で扱うと抽象的すぎて初学者にとって理解が困難であるが、実際に観察すれば現象は容易に把握できる。

厚紙と楊枝を利用して、図9のような直径が10cm程度の円板状のこまを製作する。

図10のように、こまが上からみて反時計回転の場合、歳差運動も反時計回転であり、自転と歳差運動の回転方向は同じである。

水平面内の歳差運動を模擬するため、図11のように軸に糸を巻きつけて、こまを手放すと、落下し始めて後、しばらくして歳差運動を観察できる。

糸を巻き付けた側からみたこまの自転が時計回りであれば、こまは上から観測して反時計周りに回りながら螺旋状に降下する。

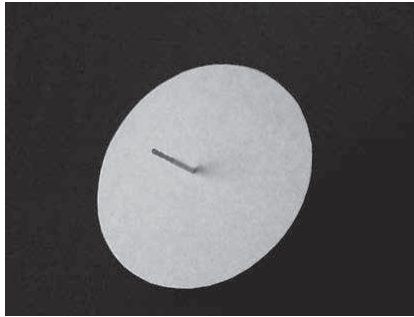


図9 厚紙と楊枝によるこまの模型  
Fig.9 Paper and Stick Top

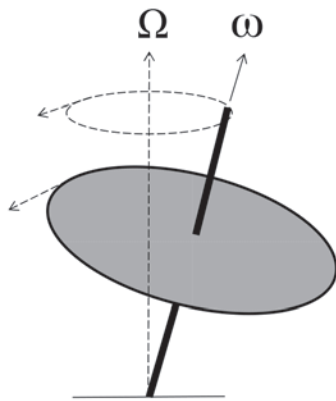


図10 こま模型の歳差運動  
Fig.10 Top Precession

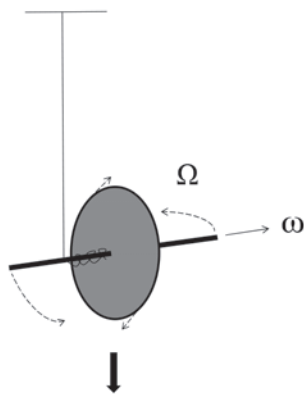


図11 こまに糸を巻きつけて手放す実験  
Fig.11 Spin and Precession of Falling Top

## 5. むすび

こまの運動は、剛体の運動として最も興味深く、また数式的に優美に表されるテーマの一つである。

本稿では、まず、摩擦の無い直立したこまが倒れない理由を、周囲から均等にひもで引っ張った棒に例えるアナロジーで説明する試みについて述べた。

また、こまの不思議な挙動として歳差運動が挙げられるが、この現象を理解するために、3つの

考え方を紹介した。ここでは、特に水平面内の歳差運動に限ったものである。

一つは、剛体の運動方程式を導いたオイラー自身の考えのように、角運動量の時間変化は、外部から加えられたモーメントに等しいことから説明するもので、物理の正攻法的な解釈である。

二つ目は、ファイマンの有名な教科書にも記載があるように、回転軸が水平なこまの軸先端を静かに手放した場合、僅かに先端が下に下がることから、水平面内に本来0であるはずの回転成分の余弦分が現れ、角運動量の増減が無いはずなので、歳差運動が生じるという説明である。

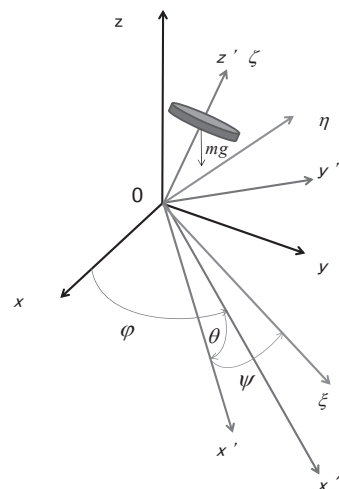
三つ目は、ニュートンの立場に戻り、こまの微小部分に作用する力を、歳差運動の角速度で回転する回転座標系から観測すると、重力で倒れようとするこまを引き起こしているのは、コリオリ力によるモーメントであることが説明でき、値はもちろんオイラーの方法によるものと同じである。

本稿では、こまの運動について、従来あまり触れられていない考え方について紹介した。こまの運動を、ファイマン流に考えたりニュートンの立場に戻って調べるのもかなり興味深い。

## 参考文献

- [1] 森下悦生, 「機械力学講義メモ」, 芝浦工業大学シェアホルダ(2015)
- [2] 東京大学応用物理学教室編, 『力学』, 東京大学出版会(1966)
- [3] ファイマン他, 『ファイマン物理学 I 力学』 坪井忠二訳, 岩波書店(1979)

## 付録：こまの運動方程式とその解[2]



付図1 座標の回転  
Fig.A1 Eulerian Angle

### A. 運動方程式

付図1のような座標系について考える。今の場合、 $xyz$ は静止座標系で、こまの回転軸は $z'$ ( $\zeta$ )である。 $z$ 軸を $\varphi$ だけ回転し、 $x \rightarrow x'', y \rightarrow y'$ に移行し、 $y'$ 軸を $\theta$ だけ回転させて、 $x'' \rightarrow x', z \rightarrow z' (= \zeta)$ とした $x'y'z'$ 座標系がこまに付随している。こまはさらに $\zeta$ 軸まわりに $\psi$ だけ相対回転して、 $\xi\eta\zeta$ 座標系に移行する。

こまの角速度 $\omega$ は、

$$\omega = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{j}' + \dot{\psi} \mathbf{k}' \quad (= \Omega + \dot{\psi} \mathbf{k}') \quad (\text{A1})$$

$x'y'z'$ 座標系の角速度 $\Omega$ は(歳差と章動に相当)、

$$\Omega = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{j}' \quad (\text{A2})$$

幾何学的に、

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' \cos \theta - \mathbf{i}' \sin \theta \quad (\text{A3})$$

であるので、

$$\omega = -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{i}' + \dot{\theta} \mathbf{j}' + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \mathbf{k}' \quad (\text{A4})$$

$$\dot{\Omega} = -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{i}' + \dot{\theta} \mathbf{j}' + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{k}' \quad (\text{A5})$$

こまの角運動量 $\mathbf{L}$ は、

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\omega = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{A6})$$

$$= -J\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{i}' + J\dot{\theta} \mathbf{j}' + I(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \mathbf{k}'$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は慣性モーメントテンソル、 $I$ はこまの回転軸周りの慣性モーメント、 $J$ は回転軸に直交する軸周りの、原点 $O$ 基準の慣性モーメントである。

原点周りの重力によるモーメント $\mathbf{N}$ は、

$$\mathbf{N} = mgl \mathbf{j}' \quad (\text{A7})$$

オイラーの方程式は、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \Big|_* + \Omega \times \mathbf{L} = \mathbf{N} \quad (\text{A8})$$

(A6) ~ (A8) 式より、

$$J\dot{\varphi} \sin \theta + 2J\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta - I\dot{\theta}(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = 0 \quad (\text{A9})$$

$$J\ddot{\theta} - J\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta + I(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})\dot{\varphi} \sin \theta = mgl \sin \theta \quad (\text{A10})$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_* I(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = 0 \quad (\text{A11})$$

本文で扱っている水平面内の定常歳差運動では、

$$\theta = \pi/2, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\psi = \omega t, \quad \dot{\psi} = \omega, \quad \ddot{\psi} = 0$$

$$\varphi = \Omega t, \quad \dot{\varphi} = \Omega, \quad \ddot{\varphi} = 0$$

であるので、モーメントの釣り合いは、

$$\text{付図 } x' \text{ 軸周り} \quad 0 = 0 \quad (\text{A12})$$

$$\text{付図 } y' \text{ 軸周り} \quad I\omega \Omega = mgl \quad (\text{A13})$$

$$\text{付図 } z' \text{ 軸周り} \quad \frac{d}{dt} \Big|_* I\omega = 0 \quad (\text{A14})$$

で本文中に現れるものと同等である。ただし、座標の表現は異なっていることに留意されたい。

### B. 定常歳差運動とその微小擾乱

$\theta = \theta_0, \dot{\varphi} = \Omega_0, \omega = \omega_0$  の定常歳差運動では、

(A10) 式より、

$$-J\Omega_0^2 \cos \theta_0 + I\omega_0 \Omega_0 = mgl \quad (\text{A15})$$

ここで、こまの回転軸周りの角速度 $\omega$ は、

$$\omega \equiv \omega \cdot \mathbf{k}' = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (\text{A16})$$

添え字 $0$ で表される定常歳差運動からの微小擾乱 $\theta', \Omega', \omega'$ は、

$$\theta = \theta_0 + \theta' \quad (\text{A17})$$

$$\dot{\varphi} \equiv \Omega = \Omega_0 + \Omega' \quad (\text{A18})$$

$$\omega = \omega_0 + \omega' \approx \omega_0 \quad ((\text{A11}) \text{ 式より}) \quad (\text{A19})$$

(A9)、(A10)式から、微小擾乱方程式は

$$(J \sin \theta_0) \dot{\Omega}' - (I\omega_0 - 2J\Omega_0 \cos \theta_0) \dot{\theta}' = 0 \quad (\text{A20})$$

$$J\ddot{\theta}' + (I\omega_0 \Omega_0 \cos \theta_0 - J\Omega_0^2 \cos 2\theta_0 - mgl \cos \theta_0) \theta' + (I\omega_0 \sin \theta_0 - J\Omega_0 \sin 2\theta_0) \Omega' = 0 \quad (\text{A21})$$

(A20) 式を積分して、

$$\Omega' = \frac{I\omega_0 - 2J\Omega_0 \cos \theta_0}{J \sin \theta_0} \theta' \quad (\text{A22})$$

ここでは、微小擾乱の周期平均を $0$ と仮定する。また、 $\theta_0 = 0, \pi$ の場合については文献[2]pp.178~179を参照されたい。

(A21)式は、(A15)、(A22)式より、

$$\ddot{\theta}' + \left[ \sin^2 \theta_0 + \left( \cos \theta_0 - \frac{mgl}{J\Omega_0^2} \right)^2 \right] \Omega_0^2 \theta' = 0 \quad (\text{A23})$$

$$\theta' = A \cos(\alpha t + \phi) \quad (\text{A24})$$

$$\alpha \equiv \left[ \sin^2 \theta_0 + \left( \cos \theta_0 - \frac{mgl}{J\Omega_0^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Omega_0 \quad (\text{A25})$$

ここで、 $A$ は振幅、 $\phi$ は位相であり、(A24)式は章動(nutation) $\theta$ の擾乱に対応する。

### C. こまの運動の厳密解

こまのエネルギー保存と角運動量保存は (A9)

~(A11)から[2]、 $a, b, c$ を定数として、順に、

$$\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mgl \cos \theta \equiv c + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{エネルギー}) \quad (\text{A26})$$

$$J \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I \omega \cos \theta \equiv a \quad (z \text{ 軸周り}) \quad (\text{A27})$$

$$I \omega \equiv b \quad (\text{回転軸周り}) \quad (\text{A28})$$

(A26) ~ (A28)式より、

$$\dot{\varphi} = \frac{a - b \cos \theta}{J \sin^2 \theta} \quad (\text{A29})$$

$$\begin{aligned} J^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + (a - b \cos \theta)^2 + 2mglJ \cos \theta \sin^2 \theta \\ = 2cJ \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{A30})$$

$$z \equiv \cos \theta \quad (\dot{z} = -\dot{\theta} \sin \theta) \quad (\text{A31})$$

とすると (A30) 式は、

$$\begin{aligned} f(z) &\equiv J^2 \dot{z}^2 = 2J(c - mglz)(1 - z^2) - (a - bz)^2 \\ &= 2mglJ \left[ z^3 - \frac{cJ + \frac{b^2}{2}}{mglJ} z^2 + \left( \frac{ab}{mglJ} - 1 \right) z + \frac{cJ - \frac{a^2}{2}}{mglJ} \right] \\ &\equiv 2mglJ(z^3 + \bar{a}z^2 + \bar{b}z + \bar{c}) \\ &= 2mglJ(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A32})$$

ここで、 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  は上式内で定義された定数、 $z_1, z_2, z_3$  は 3 次方程式  $f(z) = 0$  の根であり、特に本稿では以下の解析解を利用する[A1]。

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{-p} \cos \frac{\delta}{3} - \frac{\bar{a}}{3} \\ &= 2\sqrt{-p} \cos \frac{\delta + 2\pi}{3} - \frac{\bar{a}}{3} \\ &= 2\sqrt{-p} \cos \frac{\delta + 4\pi}{3} - \frac{\bar{a}}{3} \\ p &= -\left(\frac{\bar{a}}{3}\right)^2 + \frac{\bar{b}}{3} \quad q = \left(\frac{\bar{a}}{3}\right)^3 - \left(\frac{\bar{a}}{3}\right)\frac{\bar{b}}{2} + \frac{\bar{c}}{2} \\ \cos \delta &= -\frac{q}{\sqrt{-p^3}} \geq -1 \end{aligned} \quad (\text{A33})$$

解について、次の性質が知られている。

$$-1 \leq z_1 \leq z_2 \leq 1 < z_3 \quad (\text{A34})$$

従って、章動  $\theta$  の範囲は、

$$z_1 \leq z \leq z_2 \Leftrightarrow \theta_2 \leq \theta \leq \theta_1 \quad (\text{A35})$$

(A32) 式より、

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2mgl}{J} [(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A36})$$

$$t = \sqrt{\frac{J}{2mgl}} \int_{z_1}^z \frac{dz'}{\sqrt{(z' - z_1)(z' - z_2)(z' - z_3)}} \quad (\text{A37})$$

以下の定義を行う。

$$z \equiv z_1 + (z_2 - z_1) \sin^2 w \quad (\text{A38})$$

$$k^2 \equiv \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} < 1 \quad (\text{A39})$$

(A37) 式の被積分関数では、 $z$  は  $z'$  に、 $w$  は  $w'$  に対応しており、(A38)、(A39) 式を用いて、

$$t = \frac{1}{\sqrt{z_3 - z_1}} \sqrt{\frac{2J}{mgl}} \int_0^w \frac{dw'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w'}} \quad (\text{A40})$$

$$\int_0^w \frac{dw'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w'}} = \sqrt{\frac{mgl(z_3 - z_1)}{2J}} t \quad (\text{A41})$$

$w$  と  $z$  は、振幅関数  $\text{am}$  とヤコビ楕円関数  $\text{sn}$  により[A1]

$$w = \text{am} \left[ \sqrt{\frac{mgl(z_3 - z_1)}{2J}} t \right] \quad (\text{A42})$$

$$\begin{aligned} z &= z_1 + (z_2 - z_1) \sin^2 w \\ &= z_1 + (z_2 - z_1) + \text{sn}^2 \left[ \sqrt{\frac{mgl(z_3 - z_1)}{2J}} t \right] \end{aligned} \quad (\text{A43})$$

$z = z_1 \rightarrow z_2 (w = 0 \rightarrow \pi/2)$  が半周期  $T/2$  になるので、(A40) 式より、 $K(k)$  を第 1 種の楕円積分として[A1]、

$$T = 2 \sqrt{\frac{2J}{mgl(z_3 - z_1)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w}} \equiv 2 \sqrt{\frac{2J}{mgl(z_3 - z_1)}} K(k) \quad (\text{A44}) .$$

## D. 解の検討

**D.1 厳密解** 厳密な定常振動解を適用する手順は、まず、こまの  $m, l, I, J$  や、回転数  $\omega$  などを与える。 $\theta$  が極値となる  $\dot{\theta} = 0$  の条件を課して、 $\theta = \theta_*$  を与えると、

(A10) 式で  $\ddot{\theta} > 0$  の場合、 $\theta_* = \theta_2(\theta_{\min})$ 、 $\ddot{\theta} < 0$  で  $\theta_* = \theta_1(\theta_{\max})$  であり、 $a, b, c$  および  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ 、(A29) 式より  $\dot{\phi}|_{\theta=\theta_*}$  が定まる。3 次方程式の解析解  $z$  を (A33)

式によって計算し、 $z_1, z_2, z_3$  に対応させる。これより、(A39) 式によって、 $k$  の値が定まり、従って  $K(k)$  と

(A44) 式より周期  $T$  が定まる[A2]。各時刻における  $z$  が (A43) 式より定まり、 $\theta$  も定まる。(A32) 式から、 $\dot{z}^2$  が得られ、正負に留意して  $\dot{z}$  が計算できる。これより  $\dot{\theta}$  も定まる。(A29) 式より、 $\dot{\phi}$  が計算できる。 $\phi$  の値は (A29) の解析積分でも求まるが[2]、ここではこの値のみ数値的に求積した。

**D.2 線形解** 線形解である微小擾乱解を解析解に対応させるのに、(A17) 式において、 $\theta_0$  を解析解の  $\theta_1, \theta_2$  から、

$$\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (\text{A45})$$

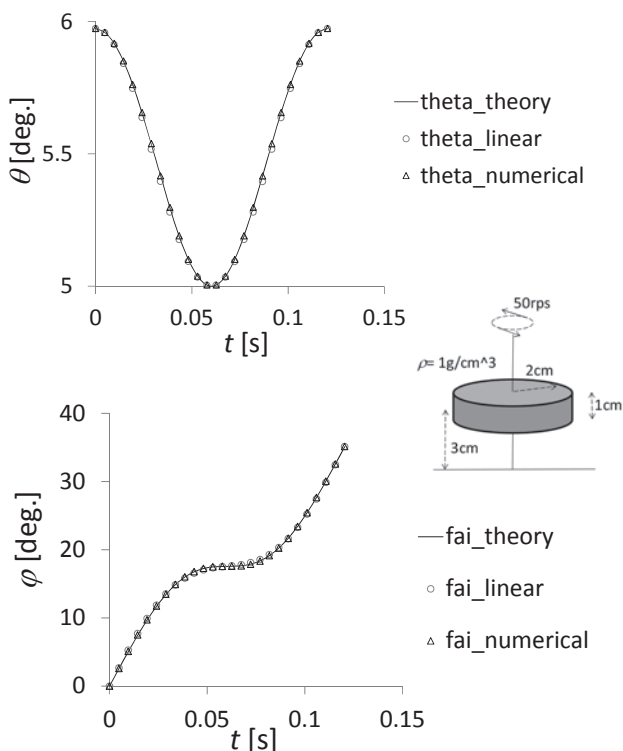
と仮定する。(A15) 式より、 $\Omega_0$  は初期条件で定まる大小 2 値あって[2]、

$$\Omega_0 = \frac{I\omega_0 \pm \sqrt{(I\omega_0)^2 - 4Jmgl \cos \theta_0}}{2J \cos \theta_0} \quad (\text{A46})$$

ここでは、厳密解の条件に対応させた、小さい方の値を比較に用いた。(A25) 式で  $\alpha$  が定まり、初期条件

$\theta(0) = A \cos \phi + \theta_0$ 、 $\dot{\theta}(0) = -A \alpha \sin \phi$  より、

$$A = \frac{\theta(0) - \theta_0}{\cos \phi}, \quad \phi = \tan^{-1} \left[ -\frac{1}{\alpha} \frac{\dot{\theta}(0)}{\theta(0) - \theta_0} \right] \quad (\text{A47})$$



$m \approx 13g, l = 3cm, I \approx 25, J \approx 127gcm^2, \omega = 314rad/s(50rps),$   
 $\theta_0 \approx 6^\circ, T \approx 0.120s, \dot{\phi}|_{z_2} \approx 0$

付図2 解の検証

Fig.A2 Theoretical, Linear and Numerical Solutions

で (A17) 式が計算できる。(A18)、(A22)式より

$$\dot{\phi} = \Omega = \Omega_0 + \frac{I\omega_0 - 2J\Omega_0 \cos \theta_0}{J \sin \theta_0} A \cos(\alpha t + \phi) \quad (A48)$$

$$\phi = \Omega_0 t + \frac{I\omega_0 - 2J\Omega_0 \cos \theta_0}{J \sin \theta_0} \frac{A}{\alpha} \sin(\alpha t + \phi) \quad (A49)$$

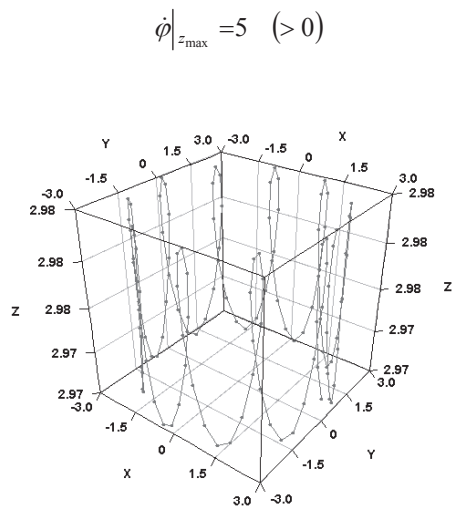
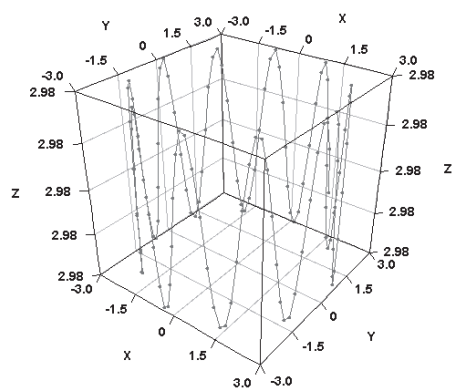
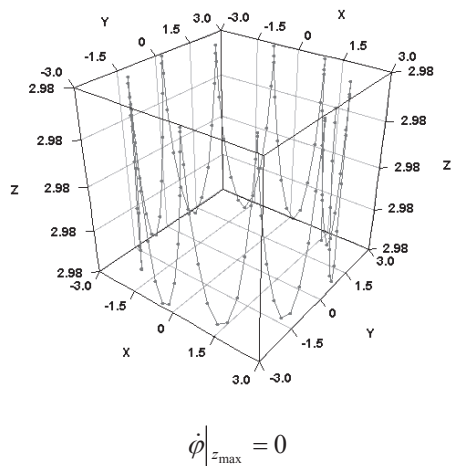
D.3 数値解 常微分方程式 (A9) ~ (A11) は、数値解も可能であり、4次精度のルンゲ・クッタ法を用いた。

D.4 計算例 付図2に同図中のこまの厳密解と数値解、線形解の比較検証を示す。軸の質量は無視している。厳密解と数値解は概ね一致しており、線形解も良好であるが、振幅の小さい場合に限られるのは言うまでもない。

付図3は、付図2のこまの重心の軌跡で、z方向変位を拡大している。 $\dot{\phi}|_{z_2} = \dot{\phi}|_{z_{max}}$  の符号に対応した固有の軌跡が観測される[2]pp.181~182。この例では、振動振幅は微小であり、実質円軌道である。

付録参考文献

[A1] 日本機械学会, 『機械工学便覧 基礎編 A2 数学』(1986)  
 [A2] <http://keisan.casio.jp/exec/system/1169780990>



付図3 こま重心の軌跡

Fig.A3 Trajectory of Top Center of Gravity

註：図6、付図3は <http://www.rinearn.com/graph3d/>にて作成。

(2015年9月9日受付)