

# 角柱(円柱)後方カルマン渦列の発生源

水島二郎(同志社大), 武本幸生(SIMULIA Corp.)

## Origin of oscillation leading to Kármán's vortex street in the flow past a rectangular (circular) cylinder

J. Mizushima\* and Y. Takemoto\*\*

\* Dept. of Mech. Eng., Doshisha Univ.,

\*\* Dassault Systemes Simulia Corp.

### ABSTRACT

The transition of the flow past a rectangular cylinder from a convectively unstable state to an absolutely unstable one is investigated numerically, in which a localized disturbance is added at a certain point in the flow, and the subsequent spatio-temporal development of the disturbance is observed. We evaluated the absolutely unstable region in the flow field in order to identify the origin of oscillation leading to Kármán's vortex street. Our results suggest that the origin lies in the absolutely unstable region, whose spatial scale is proved to be consistent with those reported in previous papers.

Key Words: wake, rectangular cylinder, Kármán's vortex street, absolute instability, convective instability

## 1 はじめに

角柱や円柱後方に生じる渦列については、Bénard<sup>1)</sup>やKármán<sup>2)</sup>の研究を始め、この100年間に多くの研究がなされており、カルマン渦列と呼ばれている。カルマン渦列の研究は大きく3つに分類される。1つ目は主に物理量を評価するもので、圧力・抗力・剥離振動数やそれらの相関に注目するものである。2つ目は渦列の安定性から渦の配置などを考えるものである。3つ目は流体力学的な安定性を扱うものである。本稿では、まず、上記の分類の3つ目にあたる流体力学的な安定性に関するこれまでの代表的な研究を紹介する。その後、これまでの研究で得られた知見の一部を、数値シミュレーションを用いて確認する。

## 2 カルマン渦列研究の歴史

カルマン渦列発生における振動源の特定と物理機構の解明をするために、流体力学的な安定性の観点からの研究が多く研究者によってなされてきた。角柱や円柱などの後流は比較的低いレイノルズ数において物体近傍で不安定性が発生するので、流れ場は非平行流である。しかし、非平行流を解析的に直接に扱うのは困難なので、これまでの物体後流の安定性に関する多くの研究では、流れ方向の各位置における垂直方向の速度分布を平行流近似した系の安定性(局所安定性)を調べ、流れ場全体の安定性(全体安定性)を推定するという研究方法が採用されてきた。この節では、これまでのカルマン渦列とウェイクの研究についてまとめておく。

### 2.1 対流不安定性と絶対不安定性

物体後流では一様な2次元平行流という流れは現実には存在せず、非一様な流れを局所的な速度分布を用いて平行流近似しているに過ぎないので、その安定性を局所安定性という。局所安定性は絶対不安定性と対流不安定性(Briggs<sup>3)</sup>)に分けられる。外部から局所的に加えられた攪乱が、流れ場中のある静止した一点で観測しているときに成長する場合、流れは(局所)絶対不安定であり、攪乱とともに動く座標系で観測すると攪乱は成長するが、流れ場中のある固定した一点で観測すれば攪乱が減衰する場合、流れは(局所)対流不安定である。

Betchov and Criminale<sup>4)</sup>はウェイクとジェットの線形安定性の時間発展モードと空間発展モードの関係を調べるため、簡単な速度分布を仮定して、レイリー方程式の固有値問題を解いた。その結果、彼らは偶然にも複素波数と複素位相速度の関係に特異性があることを発見した。彼らはその特異性が意味するところを明らかにしなかったが、Gaster<sup>5)</sup>はこの特異性が群速度が0のモードに相当することを明らかにし、すべての波数を含んだ攪乱を与えると群速度が0のモードは減衰し、波束が下流へと移流する例を示した。このような不安定性は現在では対流不安定と呼ばれ、絶対不安定性の発生は複素波数と複素位相速度の関係の特異性により判断できることがわかった。このことはプラズマ物理の分野の研究では既によく知られていた事実であったが、流体物理の分野には、Triantafyllou *et al.*<sup>6)</sup>やKupfer *et al.*<sup>7)</sup>によってその概念が導入され、絶対不安定性と対流不安定性は、複素波数空間から複素位相速度空間への写像の性質によって説明できることが明らかにされた。

## 2.2 臨界レイノルズ数

カルマン渦列が発生する臨界レイノルズ数は、流れの重要な指標であるが、これまでの多くの理論的研究は平行流近似を用いているので、実験結果と計算結果の比較には多くの議論と解釈が行われてきた。レイノルズ数の定義についても、実験では円柱直径が用いられ、理論ではウエイクの半値幅が用いられてきたが、ここでは、レイノルズ数を一様流速  $U$  と円柱直径  $d$  によって定義し、流れが局所対流不安定となるレイノルズ数を  $R_{dc}$ 、局所絶対不安定となるレイノルズ数を  $R_{da}$ 、流れ場全体が不安定となるレイノルズ数を  $R_{dg}$  で表わす。

Sato and Kuriki<sup>8)</sup>は平板後流にスピーカーを用いて攪乱を与えてその成長を調べ、平行流および非粘性近似の下で計算した線形増幅率との比較を行った。その結果、実験結果は計算による線形増幅率最大モードの攪乱で説明できることが示された。ウエイクの局所臨界レイノルズ数を最初に評価したのは Taneda<sup>9)</sup> であると思われる。Taneda は流れが対流不安定となる臨界レイノルズ数を実験とオア・ゾンマーフェルト方程式の固有値解析により求め、それぞれ  $R_{dc} = 1.0$  および  $R_{dc} = 3.2$  を得た。レイノルズ数が大きくなると、ウエイクの安定性は対流不安定から絶対不安定へ遷移することを明らかにしたのは、Nakaya<sup>10)</sup>であり、 $30 < R_{da} < 40$  であることが示された。Triantafyllou *et al.*<sup>11)</sup>は、レイリー方程式を用いて、円柱後流のいくつかの位置における流速分布を平行流近似してその局所安定性の解析を行ない、 $R_{dc} < 34 < R_{da} < 56$  を得た。

Chomaz *et al.*<sup>12)</sup>は1次元のモデル方程式を用いて、局所絶対不安定領域の存在は全体不安定の十分条件ではないこと、すなわち  $R_{dc} < R_{da} < R_{dg}$  であることを示した。Chomaz らの結果は、Monkewitz<sup>13)</sup>によって、さまざまな平行流の速度分布の線形安定性を調べることで確認された。彼は  $R_{dc} = 5$ 、 $R_{da} = 25$  を求め、これらの値は実験的にカルマン渦列が発生するレイノルズ数  $R_{dg} = 47$  よりも小さくなることを示した。

平行流近似を用いることなく全体安定性を直接調べることもできる。Jackson<sup>15)</sup>は円柱を過ぎる2次元非平行流の全体安定性を数値的に調べ、 $R_{dg} = 46$  を得た。また、Noack and Eckelmann<sup>16)</sup>は3次元非平行流の全体安定性を数値的に調べ、 $R_{dg} = 54$  を得た。これらの研究で使われている手法は有限要素法を用いた固有値解析である。また、差分法やスペクトル法を用いて固有値解析を行い、全体安定性の判別をすることも可能である。<sup>17),18)</sup>

## 2.3 絶対不安定領域

物体後流中において絶対不安定となる領域の位置と大きさは、振動源がどの領域にあるのか推定するための指標となる。Betchov and Criminale<sup>4)</sup>などによれば、後流速度分布の速度欠損が95%程度になると(局所)絶対不安定が生じることが指摘されている。Koch<sup>20)</sup>は双子渦後方(下流)で、局所不安定性が絶対不安定から対流不安定に交替することを示した。このことをより具体的に示

したのは Triantafyllou *et al.*<sup>11)</sup>である。彼らは、流れが全体不安定となる臨界レイノルズ数より低いレイノルズ数では円柱後流はどの場所でも対流不安定であり、臨界レイノルズ数より高いレイノルズ数では円柱に近い領域は絶対不安定、下流側では対流不安定となることを明らかにした。たとえば、レイノルズ数  $R_d = 56$  のときは、円柱から  $3.5d$  の範囲は絶対不安定であり、それよりも下流では対流不安定である。これとほぼ同等の結果は Chomaz *et al.*<sup>12)</sup>によっても得られている。弱非平行を考慮した研究も行われ、レイノルズ数  $R_d = 50$  では円柱から  $5d \sim 9d$  の範囲が絶対不安定であることが Belan and Tordella<sup>14)</sup>によって示された。

## 2.4 振動数の選択

全体不安定の振動数がどのように選択されるかについての研究もなされてきた。全体不安定の振動数は、線形増幅率が最大となる振動数になるという予想が、Nishioka and Sato<sup>19)</sup>によってなされた。一方、Koch<sup>20)</sup>は全体不安定の振動数は、絶対不安定領域の下流端の振動数であるとし、Monkewitz<sup>21)</sup>は絶対不安定領域の上流端の振動数であるとした。これらに対し、Chomaz *et al.*<sup>22)</sup>は複素振動数が鞍点となる位置での振動数によって全体不安定の振動数が決まるとした。Chomaz *et al.*の結論は、弱非並行性を考慮しても変わらないことが Pier<sup>23)</sup>によって示された。

## 3 数値シミュレーションの方法

これまでの研究により明らかになったように、物体後流においては物体直後に存在する(局所)絶対不安定領域において自己維持的な振動が生じ、その振動が(局所)対流不安定領域へ波となって伝わり、カルマン渦列が形成されると考えられている。これまで行われてきた平行流近似を用いた方法は、計算負荷が小さい反面、非平行性から生じる局所安定性と全体安定性の違いを考慮する必要がある。一方、非平行流の固有値解析を行う手法は、攪乱が加えられた後の過渡状態を知ることができない。しかし、Oertel<sup>24)</sup>が行ったように、ナビエ・ストークス方程式を直接に数値的に解く数値シミュレーションを用いれば、攪乱の成長の様子を評価できる。ここでは、角柱後流でパルス型の攪乱を加えたときの微小攪乱の伝播と成長をナビエ・ストークス方程式を直接に数値的に解くことにより調べ、カルマン渦列を誘起する過程を明らかにする。そのため、数値シミュレーションと線形安定性解析によって、角柱後方の各位置の局所安定性と、流れ場の全体安定性を求める。次に、線形攪乱方程式を発展方程式として数値的に解き、角柱を過ぎる2次元非平行流に加えた攪乱の空間的・時間的変化を数値シミュレーションにより調べる。

### 3.1 基礎方程式と境界条件

図1のように、流速  $U$  の一様な流れの中におかれた1辺の長さが  $d$  の正方形断面をもつ角柱を過ぎる流れを考

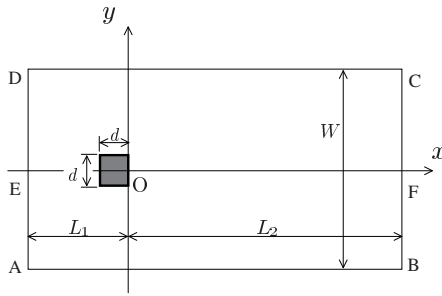


図 1 計算領域と座標系

える。角柱の後端辺の中点を原点  $O$  として、流れ方向に  $x$  軸をとり、 $x$  軸と垂直に  $y$  軸をとる。流れは非圧縮 2 次元流と仮定し、流れ関数  $\psi(x, y, t)$  と渦度  $\omega(x, y, t)$  を導入する。このとき、流れを支配する基礎方程式は  $\omega$  と  $\psi$  に関する渦度輸送方程式とポアソン方程式である。レイノルズ数を  $Re \equiv Ud/\nu$  で定義する。主流を  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ 、攪乱を  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  と表し、解を  $\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}, \omega = \bar{\omega} + \hat{\omega}$  とおく。攪乱は微小であるとして攪乱の非線形項を無視すると、渦度輸送方程式から線形攪乱方程式が得られる。この線形攪乱方程式と  $\hat{\psi}$  についてのポアソン方程式を差分法で数値的に解くことにより、攪乱の時間発展を求める。

## 4 計算結果

### 4.1 局所安定性

角柱後方の各位置における流れを平行流として近似し、その安定性を調べた。図 2 は計算結果の代表例で、 $Re = 50$  における攪乱の増幅率  $\sigma_p$  である。この図から、 $Re = 50$  において角柱直後の領域は局所絶対不安定であり、 $\bar{x}_c = 3.93$  より下流の領域は局所対流不安定となることが分かる。同様に、 $40 \leq Re \leq 60$  における局所絶対不安定領域と局所対流不安定領域の境界位置  $\bar{x}_c$  を求めると、図 3 のようになる。ここで、 $x_t$  は各レイノルズ数における角柱後方の双子渦の長さである。

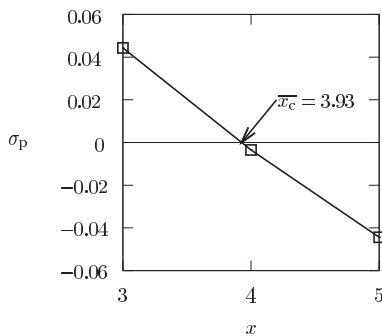


図 2 局所不安定性の線形時間増幅率  $\sigma_p, Re = 50$ .

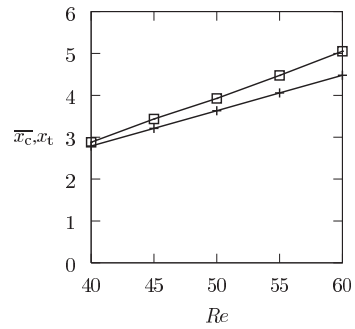


図 3 絶対不安定領域と対流不安定領域の境界。□:  $\bar{x}_c$ , 絶対不安定領域と対流不安定領域の境界。+:  $x_t$ , 双子渦長さ。

### 4.2 全体安定性

非平行な定常解を主流とし、平行流近似を用いずに線形攪乱方程式を適当な初期条件のもとに数値シミュレーションを行い、攪乱の増幅率  $\sigma_g$  を評価すると図 4 のようになった。この図より、角柱を過ぎる流れが全体不安定となる臨界レイノルズ数は  $Re_g = 46.2$  と求められる。

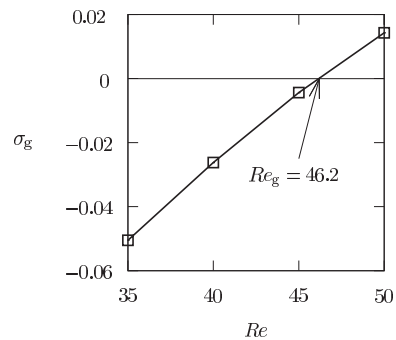


図 4 全体不安定性の線形増幅率  $\sigma_g$ .

### 4.3 インパルス応答

角柱の下流  $(x, y) = (35, 0)$  にインパルス型攪乱（矩形攪乱）を与えて、その攪乱の時間発展を調べる。ここでは、角柱中心を通る  $x$  軸上の攪乱振幅を観測する。図 5(a) では、全体不安定性の超臨界レイノルズ数  $Re = 50$  における、 $(x, y) = (10, 0)$  の点と  $(x, y) = (20, 0)$  の点で観測した  $\hat{\psi}$  の振幅  $\hat{\psi}_{a10}$  および  $\hat{\psi}_{a20}$  を描いた。初期に与えた攪乱が減衰した後 (AB および A'B'),  $\hat{\psi}_{a10}$  と  $\hat{\psi}_{a20}$  は急激に増加し (BC および B'C'), その後一定の増幅率で増加し続ける (CD および C'D'). したがって、超臨界レイノルズ数  $Re = 50$  における流れ場は全体不安定であり、攪乱は絶対不安定攪乱である。

一方、図 5(b) から明らかなように、亜臨界レイノルズ

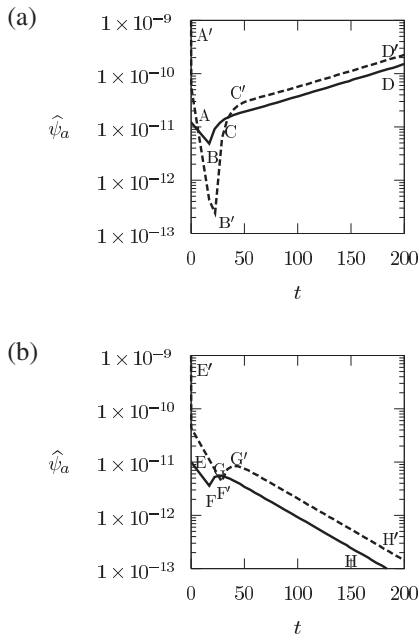


図5  $x$  軸上の  $\hat{\psi}$  の振幅,  $x = 35$  にインパルスを与えた場合. 実線:  $\hat{\psi}_{a10}, x = 10$ , 破線:  $\hat{\psi}_{a20}, x = 20$ . (a)  $Re = 50$ , 絶対不安定. (b)  $Re = 40$ , 対流不安定.

数  $Re = 40$  では,  $\hat{\psi}_{a10}$  と  $\hat{\psi}_{a20}$  は初期に与えた攪乱が減衰した後 (EF および E'F'), 攪乱の振幅は増加し (FG および F'G'), その後一定の減衰率で減衰し続ける (GH および G'H'). また, 上流側で観測した  $\hat{\psi}_{a10}$  と下流側で観測した  $\hat{\psi}_{a20}$  を比較すると,  $\hat{\psi}_{a20}$  は  $\hat{\psi}_{a10}$  より大きく, 減少に転じる時刻も遅い. これは, 波束の振幅は成長するが波束そのものは流れ去ることを示している. したがって, 亜臨界レイノルズ数  $Re = 40$  における流れ場は全体安定であり, 攪乱は対流不安定である.

次に,  $\hat{\psi}$  の空間分布の時間変化を見ることにする. 超臨界レイノルズ数  $Re = 50$  における,  $x$  軸上の  $\hat{\psi}$  の空間分布は図6のようになる. 図6(a) (フェーズ1,  $t = 10$  まで) のように, 攪乱を与えた直後  $t = 0.1$  には, 攪乱は下流側だけではなく上流側の角柱近傍にも伝播し, その後は減衰しながら下流へ移流する. さらに時間が経つと, 図6(b) (フェーズ2,  $t = 10$  以降) のように,  $t = 10$  においては, 角柱近傍 ( $x \approx 5$ ) には初期に与えた攪乱とは別のピークが生じる. この角柱近傍の攪乱の振幅は, 時間とともに大きくなっている. これは, 局所絶対不安定領域で攪乱が増幅されているためであり, 4.1 節で求めたように,  $Re = 50$  における局所絶対不安定領域は角柱直後に存在し, 局所絶対不安定領域と局所対流不安定領域の境界位置は  $\bar{x}_c = 3.93$  であることに対応している. また,  $t = 10$  のとき角柱近傍にある波束の前縁は, 時間とともに下流に移流している ( $t = 20$  で  $x \approx 17$ ,  $t = 30$  で  $x \approx 26$ ,  $t = 40$  で  $x \approx 35$ ). これらより, 局所絶対不安定でない領域に与えられた攪乱は瞬時に局所絶対不安定領域に伝わり, そこで増幅され続け, 増幅された攪乱が下流に伝播することで流れが全体不安定とな

ることが分かる.

一方, 亜臨界レイノルズ数  $Re = 40$  においては, 図3からわかるように角柱直後に局所絶対不安定領域が存在するにもかかわらず, 局所絶対不安定領域で攪乱が増幅され続けることがなく, 流れ場全体の安定性は対流不安定となる. このことは, 局所絶対不安定領域の存在が流れ場全体が絶対不安定となるための十分条件にならないことを示している.

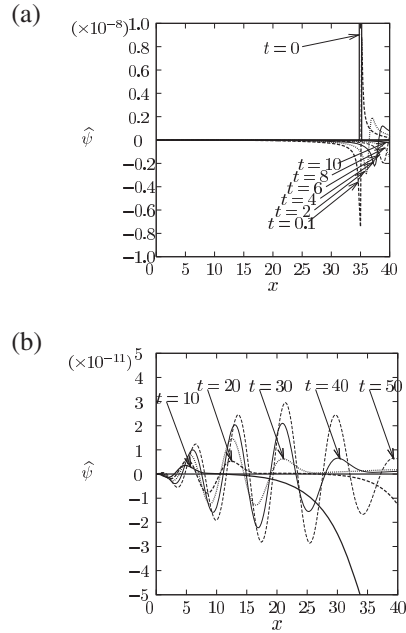


図6  $x$  軸上の  $\hat{\psi}$  の空間分布,  $x = 35$  にインパルスを与えた場合,  $Re = 50$ . (a) フェーズ1,  $t = [0, 10]$ . (b) フェーズ2,  $t = [10, 50]$ .

### 参考文献

- (1) Bénard, H., C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 147, (1908), pp. 839-842.
- (2) Von Kármán, Th., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., (1911), pp. 509-517.
- (3) Briggs, R. J., "Electron-stream interaction with plasmas", Cambridge, MIT Press, (1964), pp. 8-46.
- (4) Betchov, R., Criminale, W. O., Phys. Fluids, Vol. 9, (1966), pp. 359-362.
- (5) Gaster, M., Phys. Fluids, Vol. 11, (1968), pp. 723-727.
- (6) Triantafyllou, G. S., Kupfer, K., Bers, A., Phys. Rev. Lett., Vol. 59, (1987), pp. 1914-1917.
- (7) Kupfer, K., Bers, A., Ram, A. K., Phys. Fluids, Vol. 30, (1987), pp. 3075-3082.
- (8) Sato, H., Kuriki, K., J. Fluid Mech., Vol. 11, (1961), pp. 321-352.
- (9) Taneda, S., J. Phys. Soc. Japan., Vol. 18, (1963), pp. 288-296.
- (10) Nakaya, C., J. Phys. Soc. Japan., Vol. 41, (1976), pp. 1087-1088.
- (11) Triantafyllou, G. S., Triantafyllou, M. S., Chryssostomidis, C., J. Fluid Mech., Vol. 170, (1986), pp. 461-477.
- (12) Chomaz, J. M., Huerre, P., Redekopp, L. G., Phys. Rev. Lett., Vol. 60, (1988), pp. 25-28.
- (13) Monkewitz, P. A., Phys. Fluids, Vol. 31, (1988), pp. 999-1006.
- (14) Belan, M., Tordella, D., J. Fluid Mech., Vol. 552, (2006), pp. 127-136.
- (15) Jackson, C. P., J. Fluid Mech., Vol. 182, (1987), pp. 23-45.
- (16) Noack, B., R., Eckelmann, H., Phys. Fluids, Vol. 6, (1994), pp. 124-143.
- (17) 千葉賢, ながれ, Vol. 15, (1996), pp. 295-307.
- (18) Dauchy, D., Dusek, J., Fraunie, P., J. Fluid Mech., Vol. 332, (1997), pp. 295-339.
- (19) Nishioka, M., Sato, H., J. Fluid Mech., Vol. 89, (1978), pp. 49-60.
- (20) Koch, W., J. Sound. Vib., Vol. 99, (1985), pp. 53-58.
- (21) Monkewitz, P. A., Nguyen, L. N., J. Fluids Struct., Vol. 1, (1987), pp. 165-184.
- (22) Chomaz, J. M., Huerre, P., Redekopp, L. G., Stud. Appl. Math., Vol. 84, (1991), pp. 119-144.
- (23) Pier, B., J. Fluid Mech., Vol. 458, (2002), pp. 407-417.
- (24) Oertel, H. Jr., Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 22, (1990), pp.539-564.