

有限体積法における高次精度流束積分スキームの提案

玉置義治, 今村太郎
東京大学大学院

Proposal for New Higher-Order Flux Quadrature Scheme for Finite-Volume Method

by
Yoshiharu Tamaki and Taro Imamura (The University of Tokyo)

ABSTRACT

In this paper, a new higher-order flux quadrature scheme for finite-volume methods (FVM) is proposed. The scheme is especially for unstructured Cartesian grids; therefore only the information (values and its spatial gradients) of the two cells which shares the face is used to calculate the flux. On the FVM, cell-averaged values are updated in each cell. The values are interpolated onto the cell-interface to calculate numerical flux, and then the flux is integrated over the cell-interface. The spatial accuracy of the entire scheme depends on the accuracy of both the variable interpolation and the flux quadrature. In the conventional flux quadrature, the flux evaluated at one point on each face of the cell is multiplied with the area of the face, but the accuracy is only second-order. In order to enhance the accuracy of the quadrature, at first, the error terms of the conventional scheme are clarified. The error term is represented with the variables and its gradient value along the face, thus can be calculated using the value of the both cell sharing the face. Adding this error term as a modifying flux to the conventional second-order integrated flux, the accuracy of quadrature is enhanced to fourth-order. The new scheme is implemented in the verification problems on Burgers and Euler equations on the FVM framework, and the results show fourth-order convergence correctly.

1. 背景

近年、複雑形状に対する格子生成を容易にするために非構造格子法や木構造を用いた直交格子法が注目されている。これらの格子では一般的に、有限体積法による離散化および MUSCL や ENO などによる変数補間を用いた高次精度化が行われる。有限体積法では積分型の離散方程式が用いられ、高次精度化のためには変数を面上に高次精度に補間するだけでなく、補間値を用いて計算された流束を高次精度に面積分する必要がある。従来のスキームでは、方向別に変数補間を行い、面中心で求めた流束に対し単に面積を掛けるだけで面積分を行っていたが、これは 2 次精度に留まる¹⁾。

非構造格子において有限体積法以外の定式化で高次精度化を図る方法として、Spectral-Volume 法²⁾や Discontinuous-Galerkin 法³⁾が挙げられる。これらのスキームはセル内の自由度を増やすことにより、遠隔セルを参照せず、自セルと隣接セルの値のみで定式化されるという特徴がある。しかしながら、これらのスキームでは自由度の増加に伴い計算コストが大幅に増大することが知られている⁴⁾。

有限体積法において面積分の効果を正しく考慮した高次精度スキームとしては、Casper⁵⁾による有限体積法ベースの ENO や、Titarev ら⁶⁾による WENO などがある。また非構造格子におけるスキームとしては Barth ら⁷⁾による k-exact 法がある。これらのスキームは高次精度に補間した変数値を用いて流束を面上の複数点で求め、それらを用いて高次精度の面積分を行う。この方法では 4 次精度を達成するために 2 次元では 2 点、3 次元では 4 点の積分点が必要となり、計算量の大幅な増大が避けられない。Buchmüller ら⁸⁾はこの問題点を解決するため、流束計算面の周辺にある面の流束を参照して高次精度面積分を行う方法を提案している。この方法では流束計算は面あたり 1 回で良い反面、格子線が定義されることを前提としており、面から見て左右のセル以外の情報も参照することから、非構造格子への拡張は困難である。

そこで本研究では、非構造データの直交格子に対する適用を念頭において、有限体積法における高次精度面積分スキームを提案する。初めに、従来の方法における流束面積分の含む誤差項を明らかにする。次に、求めた誤差項を面の両側セルの持つ情報(変数値とその空間勾配)のみを用い

て明示的に修正することにより、4 次精度の面積分を行う方法を構築する。最後に、スキームを実装して Burgers 方程式および Euler 方程式において検証を行う。

2. 非構造直交格子における高次精度スキーム

2. 1 補間スキーム

有限体積法では積分型の支配方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{Q} dV + \iint_S \mathcal{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1)$$

が用いられる。第 1 項は保存量 \mathbf{Q} のセル内空間 V 内での体積分を、第 2 項は流束 \mathcal{F} のセル表面 S 上での面積分を表している。各セルは変数のセル平均値を持っており、体積を掛けることで第 1 項の体積分が行われる。また、セル平均値からセル表面に変数補間を行い、セル表面両側の値から流束を評価して面積分することで第 2 項が評価される。ここで空間精度は、(1)変数補間、(2)流束面積分、の 2 つの精度から決定される。

まず、1 次元問題においてスカラー関数 $\mathbf{Q} = [u(x)]$ の変数補間を考える。セル平均値は、

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} u(x) dx \quad (2)$$

と定義される。以下上線付きの値はセル平均値を表す。ここでセル平均値から面上の値 $u_{i+1/2}$ へ補間する式は以下のように与えられる⁹⁾。

$$u_{i+1/2} = \bar{u}_i + \frac{1}{2} \bar{u}_{x_i} \Delta x + \frac{1}{12} \bar{u}_{xx_i} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (3)$$

この表式はセル中心値を単純に Taylor 展開した式、

$$u_{i+1/2} = u_i + \frac{1}{2} u_{x_i} \Delta x + \frac{1}{8} u_{xx_i} \Delta x^2 + \frac{1}{48} u_{xxx_i} \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (4)$$

とは異なり、3 階微分値の係数が消滅する。そのため、1 階微分値を 3 次精度、2 階微分値を 2 次精度で与えれば 4 次精度の補間値が得られる。また $i+1$ のセルからも同様に補間して面両側の値を与えれば(近似)Riemann ソルバーを用いた風上化が出来るが、面両側の値が 4 次精度であれば、求めた流束も 4 次精度となる。しかし、一般的には Green-Gauss や最小二乗法で求めた勾配は 2 次精度以下であるため¹⁰⁾、式(3)で表される補間式は最大 3 次精度となる。

筆者らは、非構造データの直交格子において面上に高次精度に変数補間する方法⁹⁾を提案した。この方法では一度G-GやLSQによって2次精度の勾配を

$$\bar{u}_{x_i,G} = \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x} \quad (5)$$

のように求める。次にこの値をセルに格納した後、もう一度隣接セルの値を参照して再構成する。

$$\bar{u}_{x_i,R} = \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} + \frac{2\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right) \right\} \bar{u}_{x_i,G} - \frac{1}{6} \left(\frac{2\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \right) \bar{u}_{x_{i+1},G} - \frac{1}{6} \left(\frac{2\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right) \bar{u}_{x_{i-1},G} \quad (6)$$

式(6)は等間隔部で4次精度の勾配

$$\bar{u}_{x_i} = \frac{4}{3} \left(\frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{u}_{i+2} - \bar{u}_{i-2}}{4\Delta x} \right) \quad (7)$$

と一致する。よって式(3)に代入すると、等間隔格子では4次精度の補間値が得られる。

2. 2 面積分スキーム

式(1)の第2項は、2次元直交格子上においては以下のように与えられる。ただし F 、 G はそれぞれ流束 \mathcal{F} の x 方向、 y 方向成分を表している。

$$\iint_S \mathcal{F} \cdot \mathbf{n} dS = \left(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta y + \left(\tilde{G}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{G}_{j-\frac{1}{2}} \right) \Delta x \quad (8)$$

ここでチルダ付きの値は面上での平均値を表す。一般的には方向別変数補間で与えた値を用いて流束を評価し面積を掛けて積分しているが、これは2次精度に留まる。このことを次節で示し、その修正法を与える。

3. 面積分修正流束

3. 1 定義

2次元直交格子においてスカラー関数 $Q = [u(x, y)]$ の方向別補間について考える。セル平均値の定義より、

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} u(x, y) dy dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \bar{u}(x) dx \quad (9)$$

となり、変数 u の y 方向の線上での平均値 $\bar{u}(x)$ に関する1次元問題になるため(図1)、式(3)の補間式を使うことができる。ここでセル中心のpoint valueとの関係は、

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \frac{1}{\Delta y} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} u(x, y) dy \\ &= \frac{1}{\Delta y} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \left\{ u(x, 0) + u_y(x, 0)y + \frac{1}{2} u_{yy}(x, 0)y^2 + \frac{1}{6} u_{yyy}(x, 0)y^3 + \dots \right\} dy \\ &= u(x, 0) + \frac{1}{24} u_{yy}(x, 0)\Delta y^2 + \mathcal{O}(\Delta y^4) \end{aligned} \quad (10)$$

と表せる。すなわち \bar{u} は面中心値 u に微小項 $u_{yy}\Delta y^2/24$ が加わった値である(図2)。この $\bar{u}(x)$ について1次元問題と同様に式(3)を用いて $x = \Delta x/2$ に4次精度で変数補間すると、補間値 $\bar{u}_{i+1/2}$ は面上での変数値 $\bar{u}(\Delta x/2)$ に $\mathcal{O}(\Delta x^4)$ の誤差を加えた値となる。よって式(10)の関係より

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2}} = \bar{u} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (11)$$

$$= u \left(\frac{\Delta x}{2}, 0 \right) + \frac{1}{24} u_{yy} \left(\frac{\Delta x}{2}, 0 \right) \Delta y^2 + \mathcal{O}(\Delta y^4) + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

となる。この値は面 $i + 1/2$ 上での変数の平均値を表す。しかし、この値を用いて流束を評価しても正しい面平均流束とはならない。以下このことを示す。

ここで流束関数を $F(u)$ とし、 \bar{u} を用いて流束を評価すると、

$$\begin{aligned} F(\bar{u}) &= F \left(u + \frac{1}{24} u_{yy} \Delta y^2 \right) \\ &= F(u) + \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{1}{24} u_{yy} \Delta y^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{1}{24} u_{yy} \Delta y^2 \right)^2 + \dots \\ &= F(u) + \frac{1}{24} \frac{\partial F}{\partial u} u_{yy} \Delta y^2 + \mathcal{O}(\Delta y^4) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。

一方で式(8)の右辺第1項における面上での流束の平均値は

$$\tilde{F} = F(u) + \frac{1}{24} F_{yy}(u) \Delta y^2 + \mathcal{O}(\Delta y^4) \quad (13)$$

で表される。さらに、

$$\begin{aligned} F_{yy} &= (F_y)_y = \left(\frac{\partial F}{\partial u} u_y \right)_y \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} u_{yy} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_y u_y \end{aligned} \quad (14)$$

であるので最終的に、

$$\tilde{F} = F(u) + \frac{1}{24} \frac{\partial F}{\partial u} u_{yy} \Delta y^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_y u_y \Delta y^2 + \mathcal{O}(\Delta y^4) \quad (15)$$

となる。式(12)と比較すると、

$$\tilde{F} = F(\bar{u}) + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_y u_y \Delta y^2 + \mathcal{O}(\Delta y^4) \quad (16)$$

という関係が得られる。これはすなわち、面平均の変数値を用いて流束評価を行っても、正しい面平均流束とならないことを示している。ただし、線形方程式では $(\partial F/\partial u) = \text{const.}$ より、式(16)において $\tilde{F} = F(\bar{u})$ となる。

面積分を空間4次精度で行うには、補正流束を

$$F_{mod} = \frac{1}{24} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_y u_y \Delta y^2 \quad (17)$$

と置き、 $F(\bar{u})$ に加えれば良い。補正流束を4次精度とするためには、面中心 $i + 1/2$ で $(\partial F/\partial u)_y$ および u_y を2次精度で与える必要がある。すなわち、

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{2} \quad (18)$$

として面中心の変数値を与え、さらに u_y も同様に与えて式(17)の右辺を評価すれば良い。なお、セル中心値から面中心値に補間を行い、式(13)の F_{yy} を直接評価することも可能であるが、面平均値での補間とすることで式(15)の右辺第2項が打ち消され、2階微分値が不要となるという利点がある。以下、実際の方程式において修正流束の表式について調べる。

3. 2 Burgers 方程式

2次元 Burgers 方程式 $u_t = (u^2/2)_x + (u^2/2)_y$ では x 方向流束 $F = u^2/2$ より、式(17)に代入すると、

$$F_{mod} = \frac{1}{24} (u_y)^2 \Delta y^2 \quad (19)$$

と表される。

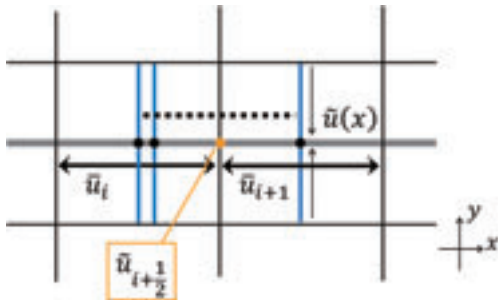
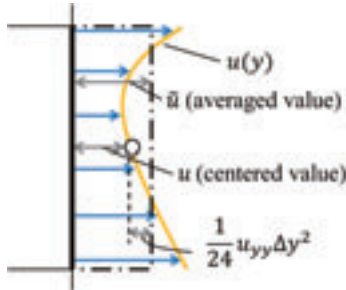

 図1 2次元直交格子における方向別変数補間(\bar{u} のセル内平均値として \bar{u} を用いて補間を行う)


図2 面平均値と面中心値の関係

3. 3 Euler 方程式 (保存量補間)

有限体積法においては時間積分によって保存量のセル平均値が更新されるが、このセル平均値をそのままセル界面へ補間する場合を考える。保存量は $\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4]^T = [\rho, \rho u, \rho v, \rho E]^T$ 、 x 方向の流束ベクトルは $\mathbf{F} = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uH]^T$ で与えられる。よってスカラー関数の時と同様に修正流束を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{mod} &= \frac{1}{24} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_y \mathbf{Q}_y \Delta y^2 \\ &= \frac{\Delta y^2}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} a_1 - \frac{\gamma-1}{2} a_2 \\ a_3 \\ \gamma a_4 - \frac{\gamma-1}{2} a_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2((Q_2)_y)^2}{Q_1} - \frac{4(Q_1)_y(Q_2)_y(Q_2)_y}{(Q_1)^2} + \frac{2((Q_1)_y)^2(Q_2)_y^2}{(Q_1)^3} \\ a_2 &= \frac{2((Q_3)_y)^2}{Q_1} - \frac{4(Q_1)_y(Q_3)_y(Q_3)_y}{(Q_1)^2} + \frac{2((Q_1)_y)^2(Q_3)_y^2}{(Q_1)^3} \\ a_3 &= \frac{2(Q_2)_y(Q_3)_y}{Q_1} - \frac{2(Q_1)_y(Q_2)_y(Q_3)_y + (Q_2)_y(Q_3)_y}{(Q_1)^2} \\ &\quad + \frac{2((Q_1)_y)^2 Q_2 Q_3}{(Q_1)^3} \\ a_4 &= \frac{2(Q_2)_y(Q_4)_y}{Q_1} - \frac{2(Q_1)_y(Q_2)_y(Q_4)_y + (Q_2)_y(Q_4)_y}{(Q_1)^2} \\ &\quad + \frac{2((Q_1)_y)^2 Q_2 Q_4}{(Q_1)^3} \\ a_5 &= \frac{6Q_2((Q_2)_y)^2 + 4(Q_2)_y(Q_3)_y(Q_3)_y + 2Q_2((Q_3)_y)^2}{(Q_1)^2} \\ &\quad - \frac{4(Q_1)_y(3(Q_2)^2(Q_2)_y + 2Q_2 Q_3(Q_3)_y + (Q_2)_y(Q_3)^2)}{(Q_1)^3} \\ &\quad + \frac{6((Q_1)_y)^2((Q_2)^3 + Q_2(Q_3)^2)}{(Q_1)^4} \end{aligned}$$

である。ここでは線形である第1行や、第2行に含まれる圧力(内部エネルギー)の項は0となる。

3. 4 Euler 方程式 (基本量補間)

MUSCL では安定性の観点から保存量を一度基本量 $\mathbf{q} = [\rho, u, v, p]^T$ に変換してから変数補間を行い、 x 方向流束 $\mathbf{F} = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uH]^T$ に変換するスキームが用いられることがある^{11), 12)}。支配方程式は保存量によって定式化されており、基本量によるものではないことに注意が必要である。ここで同様に修正流束を求めると、式(21)のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{mod} &= \frac{1}{24} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \right)_y \mathbf{q}_y \Delta y^2 \\ &= \frac{\Delta y^2}{24} \begin{bmatrix} 2\rho_y u_y \\ 4\rho_y u u_y + 2\rho u_y^2 \\ 2\rho_y u_y v + 2\rho_y u v_y + 2\rho u_y v_y \\ \frac{2\gamma}{\gamma-1} u_y p_y + a_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、

$$a_6 = 3\rho_y u^2 u_y + 2\rho_y u v v_y + \rho_y u_y v^2 + 3\rho u u_y^2 + 2\rho_y v v_y + \rho u v_y^2$$

である。

基本量補間では変換行列が単純であり、最終的な修正の項数が少なく済む利点がある。一方で保存量を基本量へ変換する際には次の注意が必要である。

保存量においてセル平均値からセル中心値への変換は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \bar{\mathbf{Q}} - \frac{1}{24} (\bar{\mathbf{Q}}_{xx} \Delta x^2 + \bar{\mathbf{Q}}_{yy} \Delta y^2) \\ &\quad + O(\Delta x^4, \Delta y^4, \Delta x^2 \Delta y^2) \end{aligned} \quad (22)$$

セル平均値 $\bar{\mathbf{Q}}$ に対して保存量から基本量への変換を行っても、変換が非線形であるため、

$$\bar{\mathbf{q}} \neq \mathbf{q}(\bar{\mathbf{Q}}) \quad (23)$$

であり、空間精度は2次に低下する。これは変数から流束への変換の場合と同様であり修正項

$$\mathbf{q}_{mod} = \frac{1}{24} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_x \mathbf{Q}_x \Delta x^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_y \mathbf{Q}_y \Delta y^2 \quad (24)$$

を加えて修正することができる。

精度を得るためのもう一つの手法として、式(22)の関係を用いて一度セル中心値を経由する方法が挙げられる。ここで、式(22)の中の2階微分値は式(25)で近似される。

$$\bar{\mathbf{Q}}_{xx}|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} (\bar{\mathbf{Q}}_{i+1,j} - 2\bar{\mathbf{Q}}_{i,j} + \bar{\mathbf{Q}}_{i-1,j}) + O(\Delta x^4) \quad (25)$$

よって、時間積分によって求められた $\bar{\mathbf{Q}}$ は、隣接セルのみの参照によってセル中心値 \mathbf{Q} に変換できる。さらに行列によって変換された基本量の中心値 \mathbf{q} について2階微分値を求めればセル平均値 $\bar{\mathbf{q}}$ に戻ることができる。また、変数補間に用いる2階微分値については、セル中心値から平均値への変換に用いたものを用いればよい。なぜならば、セル中心値を用いて得られる値 $\mathbf{q}_{xx}|_{i,j}$ は2次精度のセル平均勾配値 $\bar{\mathbf{q}}_{xx}|_{i,j}$ とみなすことができ、式(3)では打切り誤差が4次となるからである。以下の計算ではこのセル中心値を経由した変換を用いる。以上の保存量補間および基本量補間を用いた時の計算のフローチャートを図3に示す。

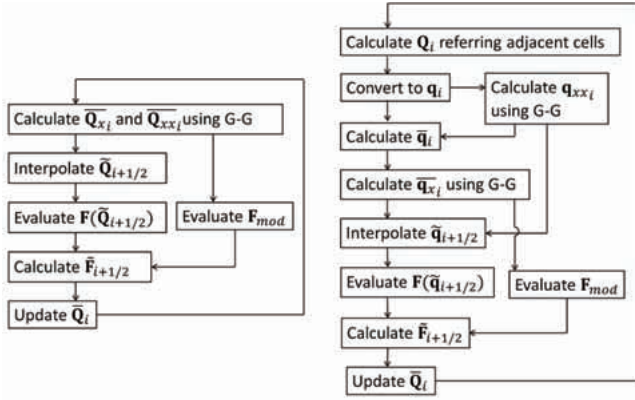


図3 計算のフローチャート
(左: 保存量補間, 右: 基本量補間)

4. 精度検証問題

4.1 Burgers 方程式

Burgers 方程式上において解析解のある問題について数値計算を行い、精度を検証する。初期値 u_0 は以下のように与える。

$$u_0 = 0.5 + 0.5\sin\{2\pi(x + y)\} \quad (26)$$

この時、衝撃波生成前の時刻 T における解析解 u_e は、

$$u_e = 0.5 + 0.5\sin\{2\pi(x + y) - 2u_e T\} \quad (27)$$

で与えられる。なお、実際には反復計算によって解を得る。計算領域は 1×1 の正方形領域であり、1方向あたり N のセルに等分割した。時間積分は4次精度 Runge-Kutta 法、空間スキームは従来の3次精度風上バイアス法(MUSCL, 流束制限なし)及び式(6)に示した勾配高次精度化による4次精度風上バイアス法を用い、式(19)の修正流束の有無による差異について調査する。なお、修正前の流束は Godnov 法による風上流束を用いる。誤差評価は全セル数を N として式(28)のようにL1 ノルムで評価する

$$(\text{Error}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \|u_i - u_{e,i}\| \quad (28)$$

また、空間精度 $\mathcal{O}(\Delta x^n)$ は、一方向に N_1, N_2 のセル数を持つ格子上で誤差が E_1, E_2 であれば、

$$\mathcal{O}(\Delta x^n) = \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) / \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right) \quad (29)$$

で求められる。

計算の初期値を図4に示す。また、無次元時間で0.05経過した時点で誤差評価を行った結果を表1及び図5に示す。

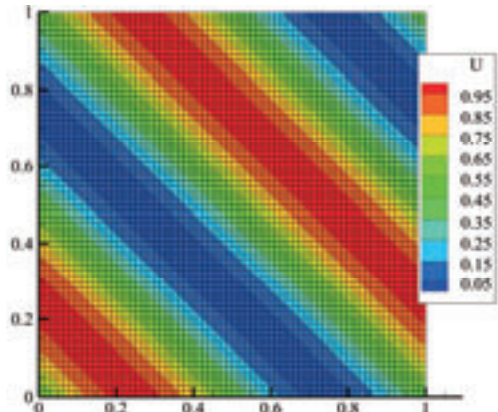


図4 検証問題(Burgers 方程式)における初期値

表1 Burgers 方程式における計算誤差

3 rd -order upwind-biased				
	without Modification		with Modification	
N	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$
8	6.021E-03	-	6.943E-03	-
16	7.000E-04	3.105	9.018E-04	2.945
32	1.061E-04	2.722	1.126E-04	3.002
64	3.439E-05	1.625	1.420E-05	2.987
128	9.859E-06	1.802	1.786E-06	2.992
256	2.625E-06	1.909	2.230E-07	3.001

4 th -order upwind-biased				
	without Modification		with Modification	
N	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$
8	2.667E-03	-	3.483E-03	-
16	4.258E-04	2.647	2.666E-04	3.708
32	1.601E-04	1.411	1.620E-05	4.041
64	4.352E-05	1.879	9.191E-07	4.139
128	1.108E-05	1.974	5.308E-08	4.114
256	2.781E-06	1.994	3.192E-09	4.055

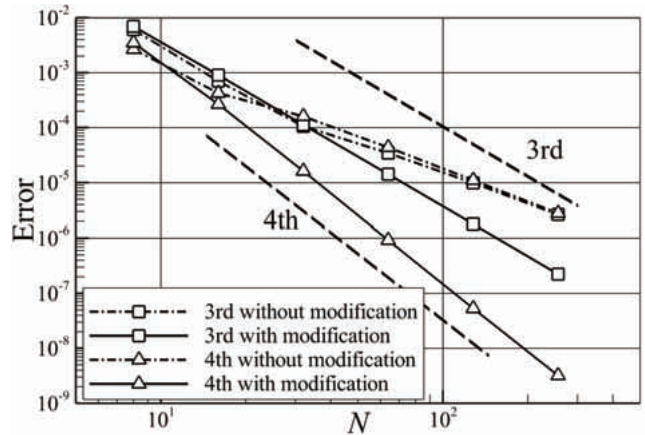


図5 Burgers 方程式における格子収束

結果より、面積分修正を行わない場合は、格子を細かくしていくに従って空間2次精度に低下していくことが分かる。これは打ち切り誤差に含まれる3次以上の項が先に収束し、面積分に含まれる2次の誤差項が支配的になってくるためである。一方で面積分修正を含めるとそれぞれほぼ3次精度、4次精度の格子収束が得られる。

4.2 Euler 方程式 (保存量補間)

Euler 方程式上で等エントロピ渦の移流について調べる。補間は保存量について行い、式(20)の修正流束を用いる。なお、解析解(添字 e)は式(30)で与えられる。

$$\begin{aligned} \rho_e &= \left[\frac{1}{S_\infty} \left(T_\infty - \frac{(\gamma - 1)\Gamma^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ u_e &= u_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi} e^{\frac{1-r^2}{2}} \bar{y} \\ v_e &= v_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} e^{\frac{1-r^2}{2}} \bar{x} \\ p_e &= S_\infty (\rho^0)^\gamma \end{aligned} \quad (30)$$

ただし $\gamma = 1.4, \Gamma = 5, S_\infty = 1/\gamma$ であり、また (\bar{x}, \bar{y}) は渦中心から見た座標を表し、 $r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ である。一様流速度は $(u_\infty, v_\infty) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ とし、初期位置 $(-2, -2)$ から無次元時間2の間、 45° 方向へ移流させる。初期値を図6に示す。計算領域、空間スキーム、時間積分は Burgers 方程式の時と

同じであり、風上流束の評価は SLAU を用いる。なお、誤差は密度値で評価する。計算結果を表 2 および図 7 に示す。

Burgers 方程式の時と同様に、面積分修正を含めない場合は精度低下が見られるのに対し、面積分修正を含めるとそれぞれ 3 次、4 次精度が達成される。また、渦半径に対して格子が少ない時(図中左側)にも誤差の低減が見られる。なお、セル界面での変数値、勾配値の与え方は任意性があるため(今回は両側セルの中央値)、この点については改善の余地がある。

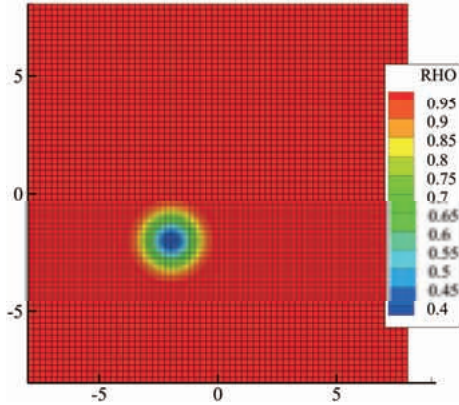


図 6 等エントロピ渦問題における密度初期値

表 2 Euler 方程式(保存量補間)における計算誤差

3 rd -order upwind-biased				
	without Modification		with Modification	
N	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$
16	8.415E-03	-	8.353E-03	-
32	2.080E-03	2.016	1.947E-03	2.101
64	4.186E-04	2.313	3.751E-04	2.376
128	6.697E-05	2.644	5.379E-05	2.802
256	1.086E-05	2.625	6.931E-06	2.956

4 th -order upwind-biased				
	without Modification		with Modification	
N	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$
16	6.215E-03	-	6.045E-03	-
32	9.444E-04	2.718	7.768E-04	2.960
64	1.276E-04	2.888	6.048E-05	3.683
128	2.780E-05	2.198	3.639E-06	4.055
256	6.938E-06	2.002	1.775E-07	4.358

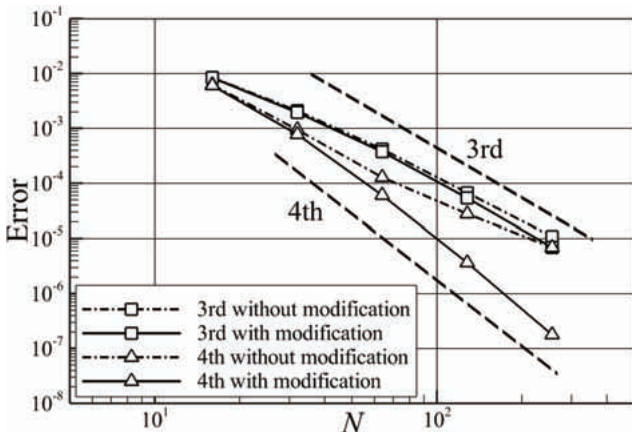


図 7 Euler 方程式(保存量補間)における格子収束

4. 3 Euler 方程式(基本量補間)

基本量補間および式(21)の修正流束を用いて、前節と同じ問題設定で解析を行う。前節と同様に誤差評価を行い、表 3 および図 8 に示す。

基本的な傾向は保存量補間の時と同じであり、誤差の絶対値もほぼ変わらない。式(22)で表されるセル中心値とセル中心値間の変換操作が入っているが、この誤差は支配的ではない。

表 3 Euler 方程式(基本量補間)における計算誤差

3 rd -order upwind-biased				
	without Modification		with Modification	
N	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$
16	8.914E-03	-	8.868E-03	-
32	2.510E-03	1.829	2.415E-03	1.876
64	4.286E-04	2.550	3.869E-04	2.642
128	6.901E-05	2.635	5.036E-05	2.942
256	1.305E-05	2.403	6.317E-06	2.995

4 th -order upwind-biased				
	without Modification		with Modification	
N	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$	Error	$\mathcal{O}(\Delta x^n)$
16	6.876E-03	-	6.802E-03	-
32	8.330E-04	3.045	6.643E-04	3.356
64	1.668E-04	2.320	3.890E-05	4.094
128	4.157E-05	2.004	2.431E-06	4.000
256	1.037E-05	2.002	1.396E-07	4.122

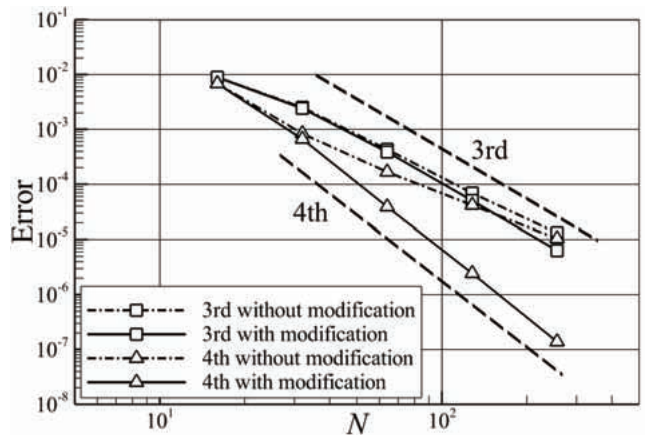


図 8 Euler 方程式(基本量補間)における格子収束

5. 結論

非構造データの直交格子に対する適用を念頭においた、有限体積法における高次精度面積分スキームを提案した。初めに、従来の方向別変数補間および 2 次精度の流束面積分の含む誤差項を明らかにした。次に、求めた誤差項を修正流束として元の流束に加えることで、4 次精度の流束面積分を行う方法を構築した。本手法は流束計算面の両側セルの値のみで定義されており、非構造直交格子への適用が容易である。またセル平均値を用いた補間を行うことで、補間および修正流束の項数を減らせることが示された。最後に、スキームを実装して Burgers 方程式および Euler 方程式において検証問題を行った結果、空間 4 次精度の格子収束が得られた。

謝辞

本研究は、科学研究費助成事業、若手研究(B)(基金)23760767に基づき実施した。

参考文献

- 1) C.-W. Shu, “High order weighted essentially nonoscillatory schemes for convection dominated problems”, *SIAM Rev.* 51 (2009), 82–126.
- 2) Z. J. Wang, “Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids. basic formulation: Basic formulation.”, *Journal of Computational Physics* 178.1 (2002): 210-251. This is a simple example of the paper format for the 32nd ANSS
- 3) B. Cockburn, and C.-W. Shu, “The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems.”, *Journal of Computational Physics* 141.2 (1998): 199-224.
- 4) T. Haga, K. Sawada, and Z. J. Wang., “An implicit LU-SGS scheme for the spectral volume method on unstructured tetrahedral grids”, *Communications in Computational Physics* 6.5 (2009): 978-996
- 5) J. Casper, “Finite-Volume Implementation of High-Order Essentially Nonoscillatory Schemes in Two Dimensions”, *AIAA Journal* 30 (1992), 2829-2835.
- 6) V.A. Titarev, E.F. Toro, “Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws”, *Journal of Computational Physics* 201.1 (2004) 238–260.
- 7) T. Barth, P. O. Frederickson, “Higher Order Solution of the Euler Equations on Unstructured Grids using Quadratic Reconstruction”, AIAA 1990-0013.
- 8) P. Buchmüller, C. Helzel, “Improved Accuracy of High-Order WENO Finite Volume Methods on Cartesian Grids”, *Journal of Science Computing* (2014) 1-26.
- 9) 玉置義治, 今村太郎, ”非構造直交格子における空間5次精度補間法の構築”, *ながれ*, 33.3 (2014).
- 10) E. Shima, K. Kitamura, K. Fujimoto, “New gradient Calculation Method for MUSCL Type Schemes in Arbitrary Polyhedra”, AIAA 2010-1081.
- 11) C. Berthon, “Stability of the MUSCL Schemes for the Euler Equations”, *Communications in Mathematical Sciences*, 3.2 (2005) 137-157.
- 12) Y. Khalighi, J. W. Nichols, S. K. Lele, F. Ham, P. Moin, “Unstructured Large Eddy Simulation for Prediction of Noise Issued from Turbulent Jets in Various Configurations”, AIAA 2011-2886.