

# 超音速流れ中の円錐上境界層における $\gamma$ - $Re_\theta$ 遷移モデルの検証

棟石篤 (IHI エスキューブ), 宇賀神裕樹 (IHI エアロスペース)

## Validation of $\gamma$ - $Re_\theta$ Transition Model for the Supersonic Boundary-layer on Cones

by

Atsushi Muneishi (IHI Scube Co., Ltd.) and Hiroki Ugajin (IHI AEROSPACE Co., LTD.)

### ABSTRACT

The  $\gamma$ - $Re_\theta$  Transition Model was applied to predict the supersonic boundary-layer transition on cones and the results were compared with flight experiments and wind tunnel ones. The model failed to predict important effects in high Mach number flows, i.e. higher mode instability, heat transfer and entropy layer. Although the prediction accuracy of the current  $\gamma$ - $Re_\theta$  Transition Model in high Mach number flows is not good, the distinctive advantages of the model such as low computation load and suitability for parallel computing are desirable and should be maintained in improvement to come. Fundamental data to make the correlation which involves the effects of Mach number, heat-transfer, entropy layer and cross-flow etc. are needed.

### 1. はじめに

超音速境界層が層流から乱流に遷移すると空力係数と空力加熱率が急激に変化, 特に空力加熱率は層流境界層の5倍にも達することもある<sup>1</sup>。このため宇宙往復機などの開発においては, 超音速流中の空力と熱防御設計での層流-乱流遷移を精度良く予測することが重要である。

境界層の層流-乱流遷移は, 擾乱の受容過程, 線形的な発達から非線形的相互干渉, ブレークダウンなどを経る複雑な現象で, 長年の研究によって現象の解明は着実に進んでいる<sup>2</sup>が, 工学的実用の観点からは未だに十分とは言えない。すなわち, 設計段階における精度の高い遷移予測は非常に難しい。今後も基盤的研究が進められるとともに, これに基づく実用的な方法の確立が強く望まれる。

境界層遷移の様々な予測方法を大別すると, (1) 関連パラメータ(たとえば $Re_\theta$ )にて判定するもの, (2)  $e^N$ 法に代表される擾乱増幅を計算して閾値にて判定するもの, (3) 近年の計算機性能向上による直接計算がある。(3)は厳密かつ詳細な現象まで捉えられる<sup>3</sup>が, 計算負荷が高く, 工学的に実用できる時期はかなり先である。(2)については, 様々な流れについて定性・定量的に良い結果が報告されている<sup>4</sup>が, 設計に多用される所謂 RANS のCFDコードとの組み合わせは容易でない。(1)については, 幾つかの方法<sup>5,6,7</sup>が提案されている。特に, Menterら<sup>8,9,10</sup>の $\gamma$ - $Re_\theta$ 遷移モデルについては, 境界層運動量厚さなどの積分パラメータを直接計算せず, 局所パラメータのみで遷移判定を行うため, 非構造格子および分散メモリ並列計算との相性も良いなど, 優れた特徴がある。多くの流れ場における検証にて良好な結果も示され, 市販CFDコードのFLUENT, CFXやSTAR-CCM+にも標準機能として搭載されるなど普及が進み, 改良に

ついでの報告<sup>11,12,13</sup>も増えている。しかし, この方法は主に低いマッハ数での相関式に基づいているため, 高マッハ数流れでの精度は高くないと懸念されるが, この点は定量的に明らかにされていない。

このような現状を踏まえ, 本報告では超音速流れにおける $\gamma$ - $Re_\theta$ 遷移モデルの精度を明確にすることを目的として4つの検証を行った。

検証は超音速流れ中の円錐上境界層を対象とする。1つ目は迎角がない場合で, 流れ場は単純な2次元流れとなる。この場合, 境界層遷移はMackモードと呼ばれる高次モードに支配されると考えられており, 1次モードが支配的と言われる低マッハ数流れの遷移とは支配モードが異なる<sup>14</sup>。2つ目の検証は, 同様の円錐上境界層について壁面温度の影響を調べる。境界層と壁面との熱交換によって遷移位置が大きく変化することが報告<sup>4,14,15</sup>されており, これも実用上において予測したい現象である。3つ目の検証は, 円錐先端の鈍頭度による影響である。鈍頭形状においては超音速流れ特有の現象である衝撃波が弓型となるため, 衝撃波下流の主流にはマッハ数とエントロピーなどが一様でない層(以後, エントロピー層と呼ぶ)が生じる。このような場合, 鋭い円錐の遷移位置に比べて約4倍も後方で遷移することが報告<sup>16</sup>されており, 重要な現象である。遷移位置変化のメカニズムについては, エントロピー層の呑み込みによる境界層外縁局所レイノルズ数の低下<sup>17</sup>, あるいは高次モードの安定化など<sup>18</sup>の要因が報告されているが, 特定はされていない。前者の要因であれば,  $\gamma$ - $Re_\theta$ 遷移モデルによる定性的な予測は期待できる。

検証の4つ目は迎角がある場合で, よく知られた横流れ(Cross Flow)不安定が支配的となる流れである。これは, 風下側(leeward ray)と風上側(windward ray)に

圧力差が生じるため流線が曲げられ、境界層が3次元のとなり、速度分布の変曲点に起因する不安定性が生じる。  
検証ケースをまとめると：

### 2次元

- ・主流マッハ数（高次不安定モードの影響）
- ・壁面温度（境界層-壁面間熱交換の影響）
- ・先端鈍頭度（エントロピー層の影響）

### 3次元

- ・迎角がある場合の横流れ（横流れの影響）

また、今後の関連式の改良についてもあわせて検討を行う。

## 2. 解析手法

### 2.1 数値計算手法

計算には、非構造格子の有限体積法コードであるANSYS社の汎用熱流体解析コードFLUENTを用いた。

表1に数値計算手法を示す。

表1 数値計算手法

バージョン	13.0 & 15.0
支配方程式	圧縮性RANS
乱流モデル	$\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデル
ソルバ	密度ベース
フラックスタイプ	Roe-FDS
差分スキーム	2次精度風上

### 2.2 $\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデル

本報告ではMenter<sup>8,9,10</sup>らによって提案された $\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデルを用いた。このモデルは、SST  $k$ - $\omega$  方程式を間欠度と遷移運動量厚さレイノルズ数の2本の方程式と連成させる手法である。ブラジウス境界層における運動量厚さレイノルズ数 $Re_{\theta}$ と渦度レイノルズ数 $Re_{\nu}$ の最大値の間に、以下の関係式が近似的に成り立つことを利用して、境界層の積分パラメータが必要な $Re_{\theta}$ を直接計算することなく遷移予測を行うことを可能にしている。

$$Re_{\theta} = \frac{\max(Re_{\nu})}{2.193}$$

また、このモデルは主に低いマッハ数の相関式 $Re_{\theta} = f(\text{主流乱れ, 圧力勾配項})$ に基づいている。

## 3. 2次元解析

### 3.1 計算モデル

図1に計算モデルの概略図を示す。半頂角 $5^{\circ}$ の円錐で、迎角のない軸対称流れである。前縁半径については、表2のとおりとした。

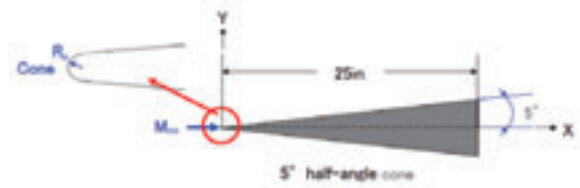


図1 計算モデル

表2 ノーズ径

	Rn[in.]
Sharp Nose	0.0001
Blunt Nose	0.0625

### 3.2 計算格子

計算格子を図2に示す。格子点数は約25,000点、 $y^+$ は0.1のオーダーである。

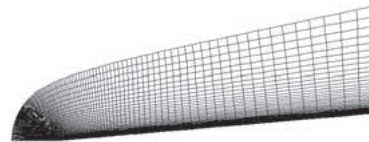


図2 計算格子

### 3.3 計算結果

#### 3.3.1 主流マッハ数

Reshotko<sup>19</sup>の文献の飛行データを検証対象とした。Sharp noseにおける飛行データの遷移レイノルズ数を図3に示す。図中の赤点が検証対象の条件である。

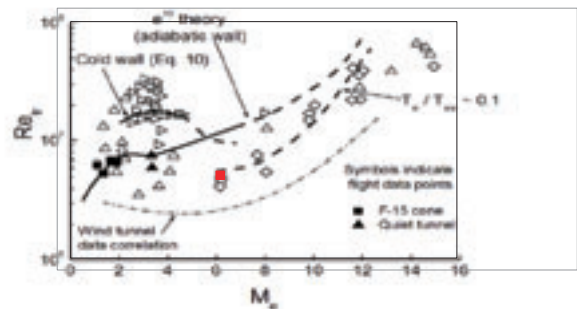


図3 飛行データの遷移レイノルズ数（Sharp nose）

これは様々な壁面温度条件におけるデータで、NASA Langley quiet tunnelでの実験結果も含んでいる。また、 $e^N$ 法による断熱壁および冷却壁条件での計算結果も併記されている。

表3に一樣流条件を示す。壁面温度は冷却壁条件（壁面温度と断熱壁温度の比が0.1）である。

表3 一樣流条件

$M_{\infty}$	$Re_{\infty}/ft$ ( $\times 10^6$ )	Tu[%]
6.2	7.8	0.1

計算から得られた壁面の加熱率分布を図4に示す。図中の縦に示されている破線は図3の遷移レイノルズ数から算出した飛行データの遷移位置である。計算結果の遷移位置は飛行データよりも後方にあり、差は大きい。現状のモデルが主に低いマッハ数での相関式を用いていることを考えると、妥当な結果ではある。

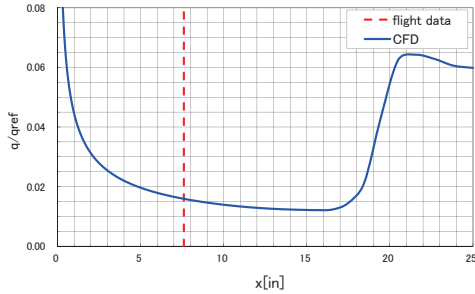


図4 主流マッハ数の影響 壁面加熱率分布

したがって、現状の相関式をそのまま高マッハ数流れに適用すると、遷移位置の予測精度としては非常に悪い。そのため、高マッハ数流れに対しては新たな相関式を構築するなどの改良が必要である。

### 3.3.2 壁面温度

次に壁面温度の効果について検証を行った。図3より壁面の冷却効果によって遷移レイノルズ数は小さくなり、冷却効果が小さい場合と比べて遷移位置は前方に移動する。そこで、断熱壁条件での計算を行い、定性的な検証もあわせて行った。図5に比較結果を示す。断熱条件で加熱率はプロットできないので、遷移位置のみプロット（図中ピンク線）する。図から、冷却効果のある飛行条件での計算結果は断熱条件での結果と比べて遷移位置は大きく後方にあり、定性的に一致しない。また、遷移位置は飛行データに比べて後方にあり、差も大きい。

したがって、壁面温度の影響について、現状のモデルの予測精度は定性的にも定量的にも非常に悪い。

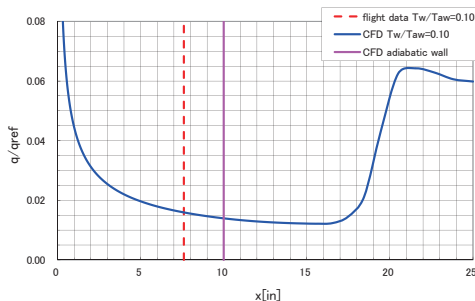


図5 壁面温度の影響 壁面加熱率分布

原因としては、先の主流マッハ数同様、現状のモデルが主に低いマッハ数での相関式を用いていることが考えられ、高マッハ数流れに対応した相関式を構築するな

どの改良が必要である。

図6に同じくReshotko<sup>19</sup>の文献にある遷移運動量厚さレイノルズ数と主流マッハ数のグラフを示す。これは、図4の遷移レイノルズ数と主流マッハ数の関係から算出されたものである。

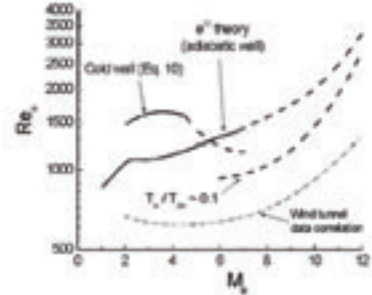


図6 遷移運動量厚さレイノルズ数と主流マッハ数

1つの改良案として、現状の乱流強度と圧力勾配項の関数になっている遷移運動量厚さレイノルズ数を図6のマッハ数と壁面温度の影響を含む相関式に置き換えてみた。以下に相関式を示す。

$$Re_{\theta} = -0.18904M_{\infty}^5 + 9.1821M_{\infty}^4 - 167.36M_{\infty}^3 + 1478.3M_{\infty}^2 - 6383.3M_{\infty} + 11461$$

図7にこの相関式を用いた計算結果を示す（図中緑色線）。元の相関式での計算結果（図中青色線）に比べて遷移位置は前方に移動し、飛行データとよく一致する。したがって、モデル化の1つの改良案を示すことができた。

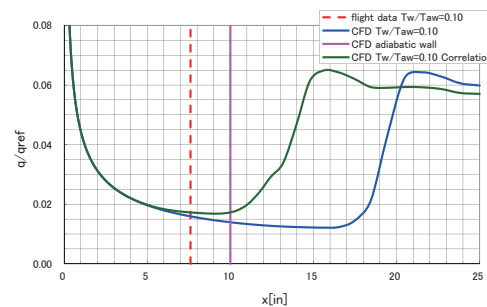


図7 新たな相関式での壁面加熱率分布

### 3.3.3 先端鈍頭度

Horvathらによる実験<sup>20</sup>を検証対象とした。表4に一樣流条件を示す。なお、乱流強度に関しては、Sharp Noseで実験値と合わせ込んだ値（1.0%）を使用した。

表4 一樣流条件

$M_{\infty}$	$Re_{\infty}/ft (\times 10^6)$	$P_0$ [psia]	$T_0$ [° F]	$T_w/T_0$
6.0	7.8	476	475	0.59

鈍頭度を変化させたときの壁面の加熱率分布を図8に示す。計算されたBlunt Noseの遷移位置はSharp Noseに比べて若干前方にあり、鈍頭度による遷移位置の変化を定性的にも定量的にもまったく捉えられていない。

図9～11にマッハ数分布、局所レイノルズ分布、運動量厚さレイノルズ数分布を示す。マッハ数分布から、Blunt Noseにて生じる弓型衝撃波の影響が、その下流でも強く見られる。局所レイノルズ数分布より、Blunt Noseでは境界層外縁の局所レイノルズ数が小さくなっていることが確認できる。しかしながら、運動量厚さレイノルズ数分布を確認すると、点線で示す計算結果の遷移位置上流から大きくなっており、遷移レイノルズ数には鈍頭度の効果が現れていないことがわかる。原因としては、境界層外縁の局所レイノルズ数低下は流速が小さくなることによるもので、遷移評価に使用する渦度レイノルズ数への影響が小さいためである。

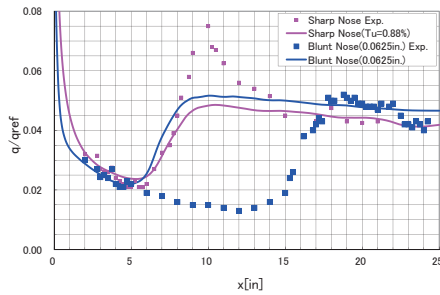


図8 鈍頭度による影響 壁面加熱率分布

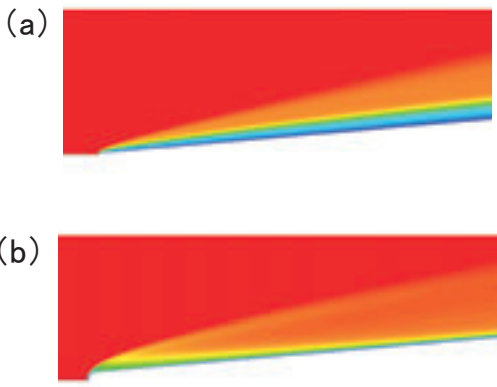


図9 マッハ数分布 (a) Sharp Nose (b) Blunt Nose

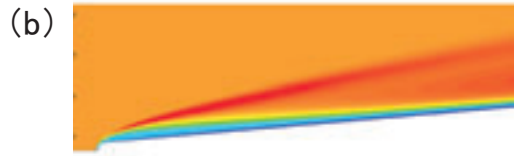


図10 局所レイノルズ数分布 (a) Sharp Nose (b) Blunt Nose



図11 運動量厚さレイノルズ数分布 (a) Sharp Nose (b) Blunt Nose

以上の結果から、現状の $\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデルは、実験値との差は大きく、定性的にも一致していない。鈍頭度の効果は、境界層外縁局所レイノルズ数低下には現れているが、遷移レイノルズ数には現れていないことが要因の1つである。局所レイノルズ数と遷移レイノルズ数を結びつけるように相関式に変更するなどの改良が必要である。

### 4. 3次元解析

#### 4.1 計算モデル

Kingらによる実験<sup>21</sup>を検証対象とした。図12に計算モデルの概略図を示す。半頂角 $5^\circ$ の円錐で、マッハ数3.5、迎角 $2^\circ$ の流れ場である。表5に一樣流条件を示す。

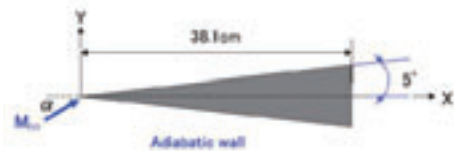


図12 計算モデル

表5 一樣流条件

$\alpha$	2.0deg
$M_\infty$	3.5
$T_\infty$	92.3K
$Re_\infty$	$3.47 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
Tu	0.1%

#### 4. 2 計算格子

計算格子を図13に示す。格子点数は約250万点、 $y^+$ は0.1のオーダーである。

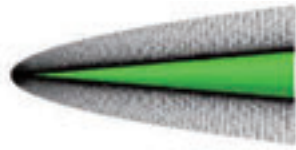


図13 計算格子

#### 4. 3 計算結果

図14に粘性/非粘性計算の限界流線およびCf分布を示す。実線は実験結果、点線は計算結果の遷移位置を表す。非粘性計算との比較から分かるように、粘性計算の側面では、横流れ速度成分の影響により流線が曲げられている様子が確認できる。これは、図15の限界流線状における粘性と非粘性の速度ベクトルのなす角からも明らかである。遷移位置を確認すると、計算結果の遷移位置は実験結果と比べて後方にずれているだけでなく、側面が下流側に膨らむような様相をしており、傾向も大きく異なっている。

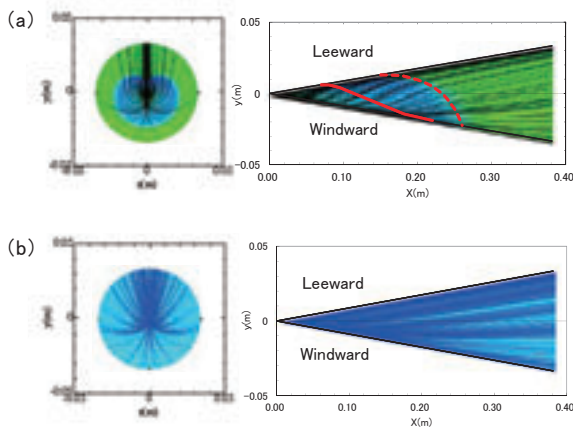


図14 限界流線およびCf分布, (a) 粘性 (b) 非粘性

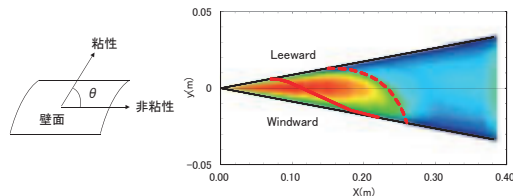


図15 限界流線における粘性と非粘性の速度ベクトルのなす角

また、最近リリースされたANSYSのV15.0には Intermittency Transition Model<sup>22</sup>という横流れ不安定の影響を考慮できる遷移モデルが追加された。Intermittency Transition Modelは $\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデルと同じく局所パラメータで遷移判定を行うRANSモデルである。

$\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデルがSST k- $\omega$ 方程式を間欠度と遷移運動量厚さレイノルズ数の2本の方程式と連成させるに対し、間欠度のみ方程式を連成させる。横流れ不安定の影響は、横流れレイノルズ数と形状係数の実験相関式によりモデル化している。

図16にIntermittency Transition Modelにて横流れ不安定の影響を考慮した場合としない場合のCf分布を示す。なお、図17に示すとおり、2次元の計算では Intermittency Transition Modelは $\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデルに比べて遷移位置を大きく前方に予測する(図中青線)。したがって、ここでは定性的な傾向のみを確認した。考慮しない場合は $\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデルと同じく下流側に膨らむような傾向なのに対し、横流れの効果を検討すると定性的には近い傾向になっている。

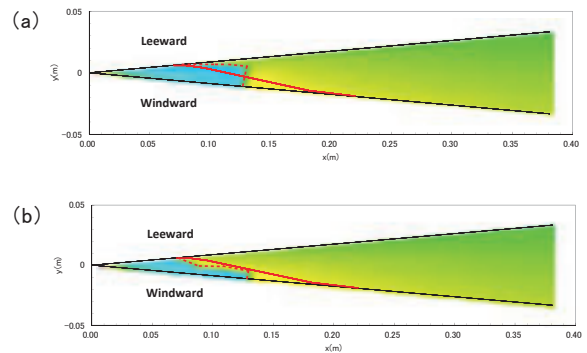


図16 Cf分布, (a) 考慮なし (b) 考慮

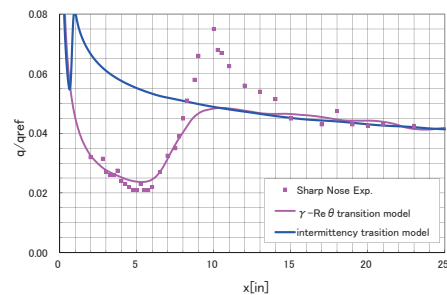


図17 2次元 Intermittency 遷移モデル 壁面加熱率分布

以上の結果から、現状の $\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデルは、実験値との差は大きく、定性的にも一致していない。横流れの効果に関するモデル化が必要である。1つのモデル化の手法としては、定性的に近い傾向が得られた Intermittency Transition Modelがあるが、遷移位置に問題があり、さらなる改良検討が必要である。

改良案としては例えば、横流れ不安定による遷移パラメータとしてよく用いられる横流れレイノルズ数を高マッハ数流れ用に改良したもの<sup>23</sup>を用いる方法が考えられるが、積分パラメータとなるため、 $\gamma$ - $Re_{\theta}$ 遷移モデルに適用するのは簡単ではない。

また最近,  $\gamma$ - $Re_0$ 遷移モデルに横流れの効果として Falkner-Skan-Cooke方程式を用いる改良モデルの報告<sup>12,13</sup>があるので, これらの進展にも期待したい。

## 5. 結論

本報告では, 超音速流れにおける $\gamma$ - $Re_0$ 遷移モデルの精度を明確にすることを目的として4つの検証を行った。

まず2次元の主流マッハ数の影響については, 飛行データに対して, 遷移位置を大きく後方に予測する。現状のモデルが主に低いマッハ数での相関式を用いていることから, 高マッハ数流れに対しては新たな相関式を構築するなどの改良が必要である。

壁面温度の影響については, 飛行データに対して, 遷移位置を大きく後方に予測する。また, 壁面冷却に関する感度についても定性的な傾向は一致しない。試行として遷移トリガーとなる遷移運動量厚さレイノルズ数に主流マッハ数と壁面温度の相関式を作成した。その結果, 遷移位置は飛行データとよく一致するようになった。したがって, 相関式に様々な効果を導入することで改良が図れることを示すことができた。しかしながら, 高マッハ流れについては, 相関式を作るための基盤データが不足しており, この点での研究が望まれる。

鈍頭度の効果については, 実験では鈍頭形状は鋭角形状に比べて遷移位置が後方になるのに対して, 計算結果ではほとんど変わらない。予測精度改善のためには, エントロピー層の影響をモデル内に取り込む必要がある。エントロピー層による流れ場の局所レイノルズ数低下は得られているので, この局所レイノルズ数と遷移レイノルズ数を関連付ける相関式とすることが1つの方向である。

3次元の横流れの影響については, 実験値に対して, 遷移位置を後方に予測するだけでなく, 遷移の様相も異なる。横流れの影響を考慮できるIntermittency Transition Modelで検証を行った。遷移位置の精度に課題はあるが, 遷移の様相には改善が見られる。

以上のように,  $\gamma$ - $Re_0$ 遷移モデルの超音速流れにおける精度には課題が多い。しかし, 非構造格子および分散メモリ並列計算との相性も良いなどの利点は魅力的なので, これらの利点を保ちながらの改良が望まれる。

## 参考文献

<sup>1</sup> Reed, H., Kimmel, R., Schneider, S., Arnal, D., "Drag Prediction and Transition in Hypersonic Flow," AIAA 97-1818, June, 1997.

<sup>2</sup> "Advance in Laminar-Turbulent Transition Modelling" RTO-AVT-151, AVT/VKI Lecture Series, June, 2008.

<sup>3</sup> Malik, M., Lin, R., Sengupta, R., "Computation of Hypersonic Boundary-Layer Response to External Disturbances," AIAA paper 1999-0411, 1999.

<sup>4</sup> Arnal, D., "Laminar-Turbulent Transition Problems in Supersonic and Hypersonic Flows," AGARD-R-761, 1988.

<sup>5</sup> Warren, E.S., Harris, J.E., Hassan, H.A., "Transition Model for High-Speed Flow," *AIAA JOURNAL*, Vol.13, No.8, August, 1995.

<sup>6</sup> Papp, J. L., Dash, S.M., "Modeling Hypersonic Laminar to Turbulent Transitional Flows for 3D Geometries Using Two-Equation Onset and Intermittency Transport Models," AIAA 2012-0449, 2012.

<sup>7</sup> Song, F., Wang, L., "RANS Modeling of High-Speed Aerodynamic Flow Transition with Consideration of Stability Theory," *Progress in Aerospace Sciences*, Vol.58, 2013.

<sup>8</sup> Menter, F.R., Langtry, R.B., Likki, S.R., Suzen, Y. B., Huang, P.G. and Völker, S., "A Correlation Based Transition Model Using Local Variables Part 1: Model Formulation," *Journal of Turbomachinery*, Vol.128, No.3, 2004, pp.413-422.

<sup>9</sup> Menter, F.R., Langtry, R.B., Likki, S.R., Suzen, Y. B., Huang, P.G. and Völker, S., "A Correlation Based Transition Model Using Local Variables Part 2: Test Cases and Industrial Applications," *Journal of Turbomachinery*, Vol.128, No.3, 2004, pp.423-434.

<sup>10</sup> Menter, F.R., Langtry, R.B., "Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes" *AIAA JOURNAL*, Vol.47, No.12, December 2009.

<sup>11</sup> 渡辺, 三坂, 大林, 加藤, 齋木, 有馬, 山口, " $\gamma$ - $Re_0$ 遷移モデルの検証と横流れ不安定のモデル化に関する検討", 第40回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム, 2008.

<sup>12</sup> Seyfert, C., Krumbein, A., "Correlation -based Transition Transport Modeling for Three- dimensional Aerodynamic Configurations," AIAA-2012-0448, AIAA 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting, 09-12 January 2012.

<sup>13</sup> Choi, J.H., Kwon, O.J., "Enhancement of Correlation-based Transition Turbulence Model for Simulation Crossflow Instability", AIAA-2014-1133, 52nd Aerospace Sciences Meeting, 13-17 January 2014.

<sup>14</sup> Mack, L.M., "Boundary Layer Stability Theory," Jet Propulsion Lab., Rep.900-277, 1969. または Schlichting, H., *Boundary Layer Theory 7<sup>th</sup>-Edition*, pp.514-525., 1979.

<sup>15</sup> Mateer, G.G., "Effects of Wall Cooling and Angle of Attack on Boundary-Layer Transition on Sharp Cones at  $M=7.4$ ," NASA TN D-6908, 1972.

<sup>16</sup> Stetson, K.F., and Rushton, G.H., "Shock Tunnel Investigation of Boundary-Layer Transition at  $M=5.5$ " *AIAA JOURNAL*, Vol.5, No.5, pp899-906, May 1967.

<sup>17</sup> Hirschel, E.H., *Basics of Aerothermodynamics*, AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics 204, pp.281, 2004.

<sup>18</sup> Malik, M.R., Spall, R.E, Chang, C.-L., "Effect of Nose Bluntness on Boundary Layer Stability and Transition," AIAA-90-0112, 1990.

<sup>19</sup> Eli Reshotko "Transition Prediction: Supersonic and Hypersonic Flows"

<sup>20</sup> Horvath, T. J., Berry, S. A., Hollis, B. R., Chang, C.-L., Singer, B. A., "Boundary Layer Transition On Slender Cones In Conventional And Low Disturbance Mach 6 Wind Tunnels", AIAA 32nd Fluid Dynamics Conference and Exhibit, St. Louis, MO, 24-27, June, 2002.

<sup>21</sup> King, R. A., "Three-Dimensional Boundary - Layer Transition on a Cone at Mach 3.5," *Experiments in Fluids*, Vol. 13, 1992, pp. 305-314.

<sup>22</sup> ANSYS V15.0 Theory Guide, 4.7.1-4.7.4

<sup>23</sup> Reed, H. L., Haynes, T. S., "Transition Correlations in Three-Dimensional Boundary Layers", *AIAA JOURNAL*, Vol. 32, No.5, May 1994.